Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

11. Übung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

Aufgabe 1. *(10 = 4 + 4 + 2 Punkte)*
Es seien $n, i, k \in \mathbb{N}$. Mit $(i,k) \in S_n$ werden die Transpositionen bezeichnet, die die i-te und k-te Position miteinamder vertauschen und die anderen Positionen festlassen.
Bestimmen Sie für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$$

(i) die Inversionszahl $a(\sigma) = \mid \{(i,j) \mid i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\} \mid$ und das Signum,
(ii) eine Zerlegung in spezielle Transpositionen $(k, k+1)$,
(iii) eine weitere, davon verschiedene Zerlegung von σ in Transpositionen.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Es seien K ein Körper und $a_0, \ldots, a_n \in K$.
Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} + a_n \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \left(\prod_{i \neq j} a_i \right) .$$

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 9 & -9 \\ 16 & 10 & -9 \\ 46 & 26 & -25 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist und bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie eine Matrix $C \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Q})$, so dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 4. *(10 = 2 + 3 + 3 + 2 Punkte)*
Es seien $f, g : V \to V$ zwei Endomorphismen des endlichdimensionalen K-Vektorraums V.
Zeigen Sie:
(i) f ist genau dann invertierbar, falls f keinen Eigenvektor zum Eigenwert 0 besitzt.
(ii) Ist v ein Eigenvektor von $f \circ g$ und ist $g(v) \neq 0$, so ist $g(v)$ ein Eigenvektor von $g \circ f$ zum gleichen Eigenwert.
(iii) $f \circ g$ und $g \circ f$ besitzen die gleichen Eigenwerte.
(iv) Ist $f \circ g = g \circ f$, so gilt $g(V_{f,\lambda}) \subset V_{f,\lambda}$.

Abgabe bis Freitag, den 30.01.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen