Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

2. Übung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

Aufgabe 1. *(10 = 5 + 5 Punkte)*
Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie:
(i) $< a >:= \{\ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, e, a^1, a^2, a^3, \ldots\}$ ist eine abelsche Untergruppe von G. Man nenn $< a >$ *die von a erzeugte Untergruppe* von G.
(ii) Ist G endlich, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $< a >= \{a, a^2, \ldots, a^n\}$.

Aufgabe 2. *(10 = 7 + 3 Punkte)*
Zeigen Sie:
(i) Eine nichtleere endliche Teilmenge U einer Gruppe $(G, \cdot)$ ist eine Untergruppe genau dann, wenn mit $a, b \in U$ stets gilt: $a \cdot b \in U$.
(ii) Gilt die Aussage auch dann, wenn U eine beliebige nichtleere Teilmenge ist?

Aufgabe 3. *(10 Punkte)*
Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X.
Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \ominus, \cap)$ ein Ring ist, wobei Ø das neutrale Element der Addition und X das neutrale Element der Multiplikation ist.
Ist $\mathcal{P}(X)$ im Allgemeinen ein Körper?

Hinweise: Für zwei Mengen $A, B \in X$ ist $A \ominus B = (A - B) \cup (B - A)$. Sie dürfen gerne Resultate aus den vorangegangenen Übungen verwenden.

Aufgabe 4. *(10 = 3 + 3 + 4 Punkte)*
(i) Beschreiben Sie die Addition und Mulitplikation in dem Körper $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ durch Aufstellung von Additions- bzw. Multiplikationstafeln.
(ii) Welche Elemente von $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ sind (multiplikativ) invertierbar, welche nicht?
(iii) Welchen Rest r $(0 \leq r < 41)$ lässt 7^{24} bei “Teilen mit Rest” durch 41?

Hinweis zu (iii): Führen Sie die Rechnung nachvollziehbar, aber ohne Rechner aus. Dafür reichen wenige Zeilen.

Abgabe bis Freitag, den 14.11.2014 vor der Vorlesung in die Briefkästen

---

Übungsblatt 2:
Wieviel Zeit in Minuten haben Sie für die Bearbeitung dieses Blattes gebraucht?

[ ] *min*