Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

4. Übung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

Aufgabe 1. *(6 = 2 + 2 + 2 Punkte)*
Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *polynomial*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n$ gibt, mit:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie:
(i) Ist eine Abbildung $f \neq 0$ polynomial, so sind n und die $a_0, \ldots, a_n$ eindeutig bestimmt, sofern wir $a_n \neq 0$ voraussetzen. Die Zahl n heißt der *Grad* von f.
(ii) Sind $n+1$ polynomiale Abbildungen g_i $(0 \leq i \leq n)$ gegeben mit $Grad(g_i) = i$ (insbesondere $g_i \neq 0$), so ist $\{g_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ linear unabhängig.
(iii) Die Menge $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n(x) = x^n$ ist linear unabhängig.

Hinweis: Sie dürfen für diese Aufgabe die folgende Tatsache ohne Beweis verwenden: Eine polynomiale Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad n mit $f \neq 0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Aufgabe 2. *(15 = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 Punkte)*
Untersuchen Sie die nachfolgend aufgeführten Teilmengen M von K-Vektorräumen V auf lineare Unabhängigkeit:
(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und $M = \{(1,2,3),(3,2,1),(7,8,9)\}$,
(ii) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und $M = \{(1,0,0),(3,2,1),(7,8,9)\}$,
(iii) $K = \mathbb{F}_5$, $V = \mathbb{F}_5^3$ und M wie in (ii), wobei die Komponenten der Vektoren für ihre Restklasse stehen,
(iv) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und $M = \{(1,\alpha,0),(\alpha,1,0),(0,\alpha,1)\}$, mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$,
(v) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{C}$ und $M = \{1, i, \sqrt{5}, \sqrt{5} \cdot i\}$.

Aufgabe 3. *(9 = 3 + 6 Punkte)*
Es sei K ein Körper. Ferner sei X die Menge der Elemente f in $Abb(\mathbb{N}, K)$, für die es ein N_f in $\mathbb{N}$ mit $f(n) = 0$ für $n > N_f$ gibt.
(i) Zeigen Sie, dass X ein K-Untervektorraum von $Abb(\mathbb{N}, K)$ ist.
(ii) Bestimmen Sie eine Basis von X.

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 4. *(10 = 2 + 3 + 5 Punkte)*
Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}, \text{ falls } \left\{ \begin{array}{ccc} f(-x) & = & f(x) \\ f(-x) & = & -f(x) \end{array} \right\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

Zeigen Sie:
(i) $F_g := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist gerade}\}$ und $F_u := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ungerade}\}$ sind Untervektorräume des Vektorraumes der Abbildungen auf $\mathbb{R}$.
(ii) $F_g \cap F_u = \{0\}$.
(iii) Jede Abbildung ist auf genau eine Weise als Summe einer geraden und einer ungeraden Abbildung darstellbar.
Wie können Sie die obigen Aussagen kompakt zusammenfassen?

Abgabe bis Freitag, den 28.11.2014 vor der Vorlesung in die Briefkästen

---

Übungsblatt 4:
Wieviel Zeit in Minuten haben Sie für die Bearbeitung dieses Blattes gebraucht?

[ ] *min*