Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

5. Übung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

Aufgabe 1. *(20 = 5 · 4 Punkte)*
Es seien U, V und W drei K-Vektorräume, und $U^{'} \subseteq U, V^{'} \subseteq V$ sowie $W^{'} \subseteq W$ Unterräume.
Zeigen Sie:
(i) Die Menge

$$H := \mathrm{Hom}_K(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ ist linear}\}$$

ist ein K-Vektorraum durch:

$$\begin{aligned} + : \quad & H \times H \to H; \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)\,, \\ \cdot : \quad & K \times H \to H; \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)\,. \end{aligned}$$

(ii) Die Mengen

$$\begin{array}{rcl} L_{V'} & := & \{f \in H \mid f\,|_{V'} = 0\} \\ \text{und} \quad R_{W'} & := & \{f \in H \mid f(V) \subset W^{'}\} \end{array}$$

sind Unterräume von H. ($f\,|_{V'}$ ist die Abbildung f eingeschränkt auf $V^{'}$.)
(iii) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(V, W) \times \mathrm{Hom}_K(U, V) & \to & \mathrm{Hom}_K(U, W) \\ (f, g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

ist wohldefiniert.
(iv) Für jedes $g \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ ist

$$\begin{array}{cccc} r_g : & \mathrm{Hom}_K(V, W) & \to & \mathrm{Hom}_K(U, W) \\ & f & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

linear, und für jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist

$$\begin{array}{cccc} l_f : & \mathrm{Hom}_K(U, V) & \to & \mathrm{Hom}_K(U, W) \\ & g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

linear.
(v) Für alle $g \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ ist $r_g(R_{W'}) \subset \{f \in \mathrm{Hom}_K(U, W) \mid f(U) \subset W^{'}\}$ und für alle $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist $l_f(L_{U'}) \subset \{f \in \mathrm{Hom}_K(U, W) \mid f\,|_{U'} = 0\}$.

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 2. *(20 = 7 + 7 + 6 Punkte*
Gegeben seien K-Vektorräume V, W endlicher Dimension und eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$.
Zeigen Sie:

(i) Es sind äquivalent:

- f ist injektiv;
- für jede Basis B von V gilt: $\#(B) = \#(f(B))$;
- es gibt eine Basis B von V, so dass $\#(B) = \#(f(B))$ ist und $f(B)$ linear unabhängig ist.

(ii) Es sind äquivalent:

- f ist surjektiv;
- für jede Basis B von V ist $< f(B) >= W$;
- es gibt eine Basis B von V mit $< f(B) >= W$.

(iii) Es sind äquivalent:

- f ist bijektiv;
- für jede Basis B von V gilt: $\#(B) = \#(f(B))$ und $f(B)$ ist Basis von W;
- es gibt eine Basis B von V, so dass gilt: $\#(B) = \#(f(B))$ und $f(B)$ ist Basis von W.

Abgabe bis Freitag, den 05.12.2014 vor der Vorlesung in die Briefkästen

---

Übungsblatt 5:
Wieviel Zeit in Minuten haben Sie für die Bearbeitung dieses Blattes gebraucht?

$[\qquad] \, min$