Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

6. Übung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

Aufgabe 1. *(10 = 6 + 4 Punkte)*
Es sei α eine reelle Zahl und

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{sowie} \quad U_\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$$

zwei Unterräume von $\mathbb{R}^4$ (aufgefasst als Räume von Spaltenvektoren).
(i) Bestimmen Sie die Dimension von $U \cap U_\alpha$ und $U + U_\alpha$ in Abhängigkeit von α.
(ii) Finden Sie einen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^4$ mit $V \neq U_\alpha$ für alle α und so, dass $V \oplus U = \mathbb{R}^4$ gilt.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Bilden Sie für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = (3, 2, 1), \ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

alle Matrizenprodukte $A_i \cdot A_j$ mit $1 \leq i, j \leq 5$, falls diese definiert sind.

— BITTE WENDEN —

Aufgabe 3. *(20 = 5 + 10 + 5 Punkte)*
Es V_n der $\mathbb{R}$-Vektorraum der polynomialen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$, und $f_i \in V_n$ definiert durch $f_i(x) = x^i$ $(0 \leq i \leq n)$.
Dann ist $X := \{f_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ eine Basis von V_n.
(i) Es sei $D : V_n \to V_n$ die Abbildung, die f die formale Ableitung $f^{'}$ zuordnet: Ist $f(x) = \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i x^i$, so ist $f^{'}(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} i\alpha_i x^{i-1}$.
Zeigen Sie, dass D linear ist, und beschreiben Sie die Abbildungsmatrix A von f bezüglich der Basis X.
(ii) Es seien $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{R}$ mit $\#(P) = k$ und $U_P := \{f \in V_n \mid f(p_i) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$.
Zeigen Sie: U_P ist Unterraum von V_n.
Berechnen Sie die Dimension von U_P.
(iii) Beschreiben Sie einen Isomorphismus des Restklassenraums V_n/U_P mit einem geeigneten $\mathbb{R}^l$ $(l \in \mathbb{N})$.

Abgabe bis Freitag, den 12.12.2014 vor der Vorlesung in die Briefkästen

---

Übungsblatt 6:
Wieviel Zeit in Minuten haben Sie für die Bearbeitung dieses Blattes gebraucht?

$[\qquad]\,min$