Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
M.Sc. Philipp Stopp

9. Übung zur Linearen Algebra I, WS 2014/2015

Aufgabe 1. *(10 Punkte)*
Beweisen Sie:
Sei K ein Körper, $x \in K^n$ und $U \subset K^n$ ein Untervektorraum. Dann existiert ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten in K mit n Gleichungen für n Unbekannte, dessen Lösungsmenge genau $x + U$ ist.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)*
Im Folgenden finden Sie Teilmengen X und $X^{'}$ des $\mathbb{Q}-$Vektorraums $V = \mathbb{Q}^4$ aufgelistet.
Zeigen Sie, dass es sich bei X und $X^{'}$ um Basen von V handelt und drücken Sie die Elemente von X durch Linearkombination der Elemente von $X^{'}$ aus und umgekehrt.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\};$$

$$X^{'} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 3. *(20 = 3 + 7 + 7 + 3 Punkte)*
Es sei V der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. Eine Basis von V ist gegeben durch $\mathcal{B} := \{1, X, X^2\}$. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)
(i) Zeigen Sie, dass auch $\mathcal{B}^{'} := \{2X^2 - X - 1, 2X - 3, -X^2 + X\}$ eine Basis von V ist.
(ii) Bestimmen sie die Basiswechselmatrizen $M_{id,\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ und $M_{id,\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
(iii) Sei $f : V \to V$ die Abbildung $p \mapsto -\frac{d}{dX}(p) + p$. Diese ist linear (; auch das brauchen Sie nicht zu zeigen). Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ und $M_{f,\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$.
(iv) Zeigen Sie, dass f ein Automorphismus ist.

Hinweis: Die lineare Abbildung $\frac{d}{dX}$ ist gegeben durch $\frac{d}{dX}(X^n) = nX^{n-1}$.

Abgabe bis Freitag, den 16.01.2015 vor der Vorlesung in die Briefkästen