Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Dr. Johannes Lengler

Klausur zu „Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie“, Wintersemester 2009/10

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -6 \end{array}$$

mit dem Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 2 **(1+1+1+1+1=5 Punkte)**

Die 5×5-Matrix A habe Determinante $\det(A) = 0$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch, und welche sind nicht anhand der gegebenen Informationen entscheidbar? Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

(a) Es gibt einen Vektor $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Es gibt einen Vektor $x \neq 0$ mit $Ax = 0$.

(c) A ist invertierbar.

(d) Die aus den Zeilen von A gebildeten Vektoren sind linear abhängig.

(e) Es gibt eine 5×5-Matrix B mit $A \cdot B = E_5$. (Wie üblich bezeichnet E_5 die 5×5-Einheitsmatrix.)

Aufgabe 3 **(3+2=5 Punkte)**

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit die Gleichungssystem $Ax = b$ für die Vektoren

$$\text{(i) } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 **(2+3=5 Punkte)**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 **(2+1+2=5 Punkte)**

Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem *für die erste Matrix A* zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor $\neq 0$ an.

Aufgabe 6 **(5 Punkte)**

Finden Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die die folgende quadratische Gleichung erfüllen:

$$(1+i) \cdot z^2 + (2-2i) \cdot z + (1-3i) = 0.$$

Hinweis: Ihre Rechnung sollte auf den Zwischenschritt $(z-\xi)^2 = 2i$ führen, für ein geeignetes $\xi \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 7 **(1+1+1+2=5 Punkte)**

(a) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen einen Grenzwert (in $\mathbb{R}$ oder $\pm\infty$) besitzen und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $\left(\frac{3n^2-2n+7}{-9n^2+6n}\right)_{n\geq 1}$

(ii) $\left(1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(iii) $\left((-1)^n \frac{n^2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Die folgende, rekursiv definierte Folge besitzt einen Grenzwert in den reellen Zahlen. (Das brauchen Sie *nicht* zu zeigen.) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Information den Grenzwert

$$a_0 = 0, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}^2 + 1) \quad \text{für } n \geq 1.$$

Aufgabe 8 **(1+2+2=5 Punkte)**

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Reihen gegen eine reelle Zahl konvergieren, ob sie gegen $\pm\infty$ konvergieren, oder ob sie divergieren. Begründen Sie Ihre Antwort!

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ (*Hinweis:* Quotientenkriterium)

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+3k^2+7}$ (*Hinweis:* Vergleichen Sie die Reihe mit $\sum \frac{1}{k^2}$.)