UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Johannes Lengler

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 11

Aufgabe 44 **(2+2+3+3=10 Punkte)**

Berechnen sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^1 \left(1+x+x^2\right) e^{-x} dx$ *Hinweis:* partielle Integration

(b) $\int_0^4 \sqrt{2t+1} dt$ *Hinweis:* Substitution

(c) $\int_{-1}^1 \frac{u+1}{u^2+2u+3} du$ *Hinweis:* Substitution

(d) $\int_0^1 \log(\sqrt{2v+1}) dv$ *Hinweis:* Wenden Sie zunächst die Rechenregeln des Logarithmus an. (Was ist $\log(\sqrt{x})$?) Substitutieren Sie anschließend geeignet.

Aufgabe 45 **(1+1+1+2+1+1+1+2=10 Punkte)**

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ (b) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ (c) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (d) $\int_1^\infty \frac{1}{e^x} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ (f) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ (g) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (h) $\int_0^1 \log(x) dx$

Aufgabe 46 **(5+5 = 10 Punkte)**

Finden Sie zu den folgenden Funktionen eine Stammfunktion.

(a)

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

(b)

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Anleitung: Bestimmen Sie die (möglicherweise komplexen) Nullstellen α, β des Nenners. Finden Sie dann Zahlen $A, B \in \mathbb{C}$ mit

$$f_i(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

(Dieses Verfahren nennt man **Partialbruchzerlegung**.) Integrieren Sie danach beide Summanden durch eine geeignete Substitution. Verwenden Sie außerdem im zweiten Fall zur Vereinfachung des Ergebnisses die Formel $\log(\frac{x+i}{x-i}) = -2i \cdot \arctan(x)$.

Aufgabe 47 **(4+4+4+4+4=20 Punkte, 2 Bearbeitungspunkte)**

Bestimmen Sie eine Lösung zu den folgenden Anfangswertproblemen und ein maximales Intervall für den Definitionsbereich Ihrer Lösung.

(a) $y' = -3x^2y^2, \quad y(2) = 1.$

(b) $y' = -\frac{1+y^2}{xy}, \quad y(1) = 2$

(c) $y' = -\frac{1+y^2}{xy}, \quad y(-1) = -2$

(d) $y' = e^y \cdot \sin x, \quad y(\pi) = -\ln 2.$

(e) $y' = x \cdot \left(y^2 + 2y\right), \quad y(1) = 2.$

Hinweis: Verwenden Sie in allen Aufgabenteilen das Verfahren der Trennung der Variablen.

Abgabe: Freitag, 22.01.2010 vor der Vorlesung