UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Johannes Lengler

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 12

Aufgabe 48 **(4+6=10 Punkte)**

(a) In einem Labor gedeiht eine Kolonie des Bakteriums *Ewald* unter konstanten, idealen Bedingungen, d.h. unbegrenzte Nährstoffmenge, genügend Platz und was *Ewald* sonst so braucht. Der Populationsumfang der Kolonie in Abhängigkeit von der Zeit t soll durch die Funktion $N = N(t)$ beschrieben werden. Dabei ist anzunehmen, dass der Zuwachs pro Zeiteinheit proportional zur vorhandenen Koloniestärke ist. Zu Beginn des Experiments ($t = 0$) soll die Anzahl der vorhandenen *Ewalds* gerade N_0 sein.
Modellieren Sie diese Annahmen in einem Anfangswertproblem und lösen Sie dieses.
Der Populationsumfang hat sich nach 7 Tagen verdoppelt. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante und skizzieren Sie $N(t)$ für $N_0 = 100.000.000$.

(b) In einem zweiten Versuch werden *Ewald* nicht mehr ideale Bedingungen zur Verfügung gestellt, sondern nur noch eine begrenzte Nährstoffmenge. In diesem Fall kann man annehmen, dass der Zuwachs pro Zeiteinheit proportional zu den freien Ressourcen $R = k \cdot (N_{\max} - N)$ und nach wie vor proportional zur vorhandenen Anzahl N ist (also insgesamt proportional zu $(N_{\max} - N) \cdot N$). Wie in (a) bezeichne $N_0 = N(t = 0)$ den Anfangsbestand der Kolonie.
Stellen Sie auch hierzu eine Anfangswertproblem auf und bestimmen Sie die Lösung.
Sei nun $N_0 = 100.000.000$ und $N_{\max} = 600.000.000$. Man beobachtet nach 2 Tagen einen Bestand von 120.000.000 *Ewalds*. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante und skizzieren Sie $N(t)$.

Aufgabe 49 **(3+7=10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y'(t) = (2t - 5) \cdot y(t).$$

Finden Sie anschließend die Lösung mit $y(3) = 1$.

(b) Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(\star)_h \quad y'(t) = \frac{t}{t^2 + 4} \cdot y(t).$$

Erraten Sie anschließend eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$(\star) \quad y'(t) = \frac{t}{t^2 + 4} \cdot y(t) + t.$$

Geben Sie damit alle Lösungen von $(\star)$ an und bestimmen Sie die Lösung von $(\star)$ mit $y\left(\sqrt{5}\right) = 18$.

Aufgabe 50 **(2+3+2+3=10 Punkte)**

Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Ermitteln Sie dann jeweils die den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ genügende Lösung.

(a) $y'' + y' - 2y = 0$ (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(c) $y'' + 4y = 0$ (d) $y'' - 2y' + 5y = 0$

Aufgabe 51 **(3+3+4=10 Punkte)**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme. Die auftretenden Differentialgleichungen sind linear von erster Ordnung und inhomogen. Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL und verwenden Sie dann das Verfahren der Variation der Konstanten, um eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu finden. Dann können Sie alle Lösungen der inhomogenen DGL angeben und schließlich die Lösung finden, die der Anfangsbedingung genügt.

(a) $y' + 2y = e^{-2t}, \quad y(\log 2) = \log 2$

(b) $y' = \frac{3}{t}y + t^2, \quad y(-1) = -3$

(c) $y' - \frac{4t}{1+t^2}y = 1 + t^2, \quad y(-1) = -\pi$

Aufgabe 52 **(20* Punkte)**

Die Aufenthaltsdauer von Barbituraten im menschlichen Körper wird recht gut durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} V_G \cdot y_G'(t) &= -D_G(y_G(t) - y_B(t)) \\ V_F \cdot y_F'(t) &= -D_F(y_F(t) - y_B(t)) \\ V_B \cdot y_B'(t) &= D_G(y_G(t) - y_B(t)) + D_F(y_F(t) - y_B(t)) - Ay_B(t) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $y_G(t)$, $y_F(t)$ und $y_B(t)$ die Konzentration des Bariburates zum Zeitpunkt t im Gehirn, im Fettgewebe und im Blut; V_g, V_F und V_B das Gesamtvolumen des Gehirns, des Fettgewebes und des Blutes (inklusive Leber); D_G und D_F die Diffusionsrate zwischen Blut und Gehirn bzw. zwischen Blut und Fettgewebe, und A die Abbaurate in der Leber.

Ein Patient mit den Werten $V_B = 7$, $V_F = 10$ und $V_G = 1,375$ (Angaben in l) soll für eine Operation mit dem Barbiturat Thiopenton narkotisiert werden. Die Diffusionsraten von Thiopenton betragen $D_G = 4$, $D_F = 0,7$ und $A = 15$.

Dem Patienten werden zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Dosis von $500mg = 0.5g$ Thiopenton verabreicht, wir haben also $y_G(0) = y_F(0) = 0$ und $y_B(0) = \frac{0.5}{V_B}$.

(a) Wenn die Bewusstseinsschranke bei einer Konzentration im Gehirn von etwa $0,005$ (g/l) liegt, wann wird der Patient (näherungsweise) wieder das Bewusstsein erlangen? Lösen Sie die Gleichung gegebenenfalls, indem Sie einige Werte ausrechnen und die Funktion zeichnen oder plotten lassen.

(b) Welche Konzentration hat das Thiopenton nach 24 Stunden im Blut? Wie hoch ist die Konzentration zum selben Zeitpunkt im Fettgewebe?

(c) Wenn Sie eine Konzentration von $0,1mg/l$ (egal ob in Fettgewebe oder in Blut) gerade noch durch Tests messen können, wie lange können Sie das Barbiturat im Blut nachweisen? Wie lange können Sie es im Fettgewebe nachweisen? (Beantworten Sie die Fragen wieder näherungsweise wie in (a)).

**Diese Aufgabe ist nicht verpflichtend. Wenn Sie diese Aufgabe bearbeiten, werdenhnen aber selbstverständlich die zusätzlichen Bearbeitungspunkte zuerkannt.*

Abgabe: Freitag, 29.01.2010 vor der Vorlesung