UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Johannes Lengler

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 2

Aufgabe 6 **(3+3+4=10 Punkte)**

Bestimmen Sie zu den folgenden linearen Gleichungssysteme die Lösungsmenge. Benutzen Sie dabei die Matrixdarstellung des Gleichungssystems und den Gauß-Algorithmus.

$$\text{(a)}\ \left\{\begin{array}{rcr} x_2 - x_3 & = & -4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 & = & 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\text{(b)}\ \left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - 3x_2 & = & -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{(c)}\ \left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 & = & 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

Aufgabe 7 **(10 Punkte)**

Lösen Sie für jeden möglichen Wert $t \in \mathbb{R}$ das folgende LGS. Machen Sie dabei eine Fallunterscheidung, wenn es notwendig ist.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & -3t+2 & -t+1 \\ -2 & -t & 3t-3 & t-2 \\ -4 & -3t & t^2+5t-4 & -t^2+4t-4 \end{array}\right)$$

Aufgabe 8 **(3+1+1+3+1+1=10 Punkte)**

Wir betrachten die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Vektoren sind linear unabhängig?

(a) a_1, a_2, a_3 (b) a_1, a_2, a_3, a_4 (c) a_1, a_5 (d) a_3, a_4, a_5 (e) a_1, a_2, a_5 (f) a_1, a_4

Aufgabe 9 **(5+5 Punkte)**

(a) Wie muss man eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ wählen, so dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig werden ?

(b) Begründen Sie die folgende Aussage:
Sind $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren, so lässt sich jeder beliebige Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ in der Form

$$a = c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 + c_3 \cdot a_3$$

mit geeigneten reellen Zahlen c_1, c_2, c_3 schreiben.
Hinweis: Was wissen Sie über die lineare Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3, a ?

Aufgabe 10 **(7+3 Punkte)**

(a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie durch Ausmultiplizieren, dass

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Was sind A^6, A^9 und A^{12}?

Abgabe: Freitag, 30.10.2009 vor der Vorlesung