UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Johannes Lengler

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 3

Aufgabe 11 **(3+7=10 Punkte)**

(a) Gegeben seien die Zeilenvektoren $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Welche der Matrixprodukte $v * w$, $v^t * w$, $v * w^t$ und $v^t * w^t$ sind definiert? Berechnen Sie gegebenenfalls die Produkte.

(b) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3) \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3) \quad , \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(1 \times 3).$$

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, zwei dieser Matrizen miteinander zu multiplizieren (beachten Sie, dass eine Matrix auch mit sich selbst multipliziert werden kann). Berechnen Sie für mindestens drei dieser Möglichkeiten das Matrixprodukt.

Aufgabe 12 **(7+3=10 Punkte)**

(a) Betrachten Sie die beiden 2×2-Matrizen $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie die zugehörigen linearen Abbildungen

$$f_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie die Wirkungsweise von f_P und f_S geometrisch.
Berechnen Sie die Matrizen $(P \cdot P)$, $(S \cdot S)$, $(P \cdot S)$ und $(S \cdot P)$ und beschreiben Sie die Wirkungsweise der zugehörigen linearen Abbildungen.

(b) Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4).$$

Mit f_A und f_B seien die zugeörigen linearen Abbildungen bezeichnet. Weiter sei ein *bekannter* Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ gegeben, und es seien $x, y \in \mathbb{R}^4$ *unbekannte* Vektoren, für die $f_A(x) = f_B(y) = b$ gilt. Können Sie anhand dieser Angaben die Vektoren x bzw. y eindeutig bestimmen? (Sie brauchen *keine* explizite Formel für x bzw. y zu finden.)

Aufgabe 13 **(1+2+2+2+3=10 Punkte)**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2b-3 & b+1 \\ 2b & -b \end{pmatrix} \ (b \in \mathbb{R} \text{ beliebig}), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} d & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -d \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ (d \in \mathbb{R} \text{ beliebig}), \quad E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14 **(6+4 Punkte)**

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$ gegeben. Prüfen Sie, ob A invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse. Lösen Sie dann die linearen Gleichungssysteme $(A|b)$ und $(A|c)$ mit den rechten Seiten $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Prüfen Sie nach, ob die Matrizen $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse.

Aufgabe 15 **(2+4+4=10 Punkte, optional)**

Die **Cramer'sche Regel** *besagt das Folgende:*
Ist $A \in M(n \times n)$ mit $\det A \neq 0$, so hat jedes LGS $(A|b)$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$. Diese Lösung kann man wie folgt bestimmen: Man bildet für $1 \leq j \leq n$ die Matrix $A_j \in M(n \times n)$, indem man die $j-$te Spalte von A durch den Vektor b ersetzt. Dann berechnet man $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ und erhält den gesuchten Lösungsvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Beispiele hierzu finden Sie im Skript.

Lösen Sie damit die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{array}\right)$ $(a \in \mathbb{R}$ beliebig).

(c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$.

Abgabe: Freitag, 06.11.2009 vor der Vorlesung