UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Johannes Lengler

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 5

Aufgabe 21 (2+2+1+1+3+3+2+2+2+2=20 Punkte, 2 Bearbeitungspunkte)

(a) Seien $z_1 = 4 \cdot e^{-i\cdot\frac{1}{3}\pi}$ und $z_2 = 2 \cdot e^{i\cdot\frac{1}{2}\pi}$. Bestimmen Sie $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

(b) Welche der folgenden vier komplexen Zahlen sind gleich, welche sind verschieden voneinander?

$$z_1 = 2 \cdot e^{-i\cdot\frac{1}{3}\pi}, \quad z_2 = -2 \cdot e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}, \quad z_3 = -2 \cdot e^{-i\cdot\frac{5}{3}\pi}, \quad z_4 = 2 \cdot e^{i\cdot\frac{5}{3}\pi}$$

(c) Seien $u, v, w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Ergänzen Sie die folgende Tabelle und zeichnen Sie die vorkommenden Zahlen in ein Koordinatensystem mit reeller und imaginärer Achse ein.

	Argument	Betrag	Realteil	Imaginärteil
u	$\frac{7}{6}\pi$	$\sqrt{12}$		
v	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{3}$		
w			2	2
z			$-\sqrt{3}$	1
$u \cdot v$				
$\frac{w}{z}$				
$\frac{1}{v}$				
w^8				

Aufgabe 22 **(2+2+3+3=10 Punkte)**

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen über $\mathbb{C}$:

(a) $z^2 = -\frac{1}{2}i$

(b) $z^2 - 4z + 29 = 0$

(c) $(3+i)z^2 + (-22+6i)z + (25-25i) = 0$

(d) $z^2 - \left(2\sqrt{3} + 6i\right) z + 12\sqrt{3}i = 0$

Aufgabe 23 **(3+5+2=10 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir einige reelle Polynomgleichungen vom Grad ≥ 3, die über $\mathbb{C}$ gelöst werden können.

(a) Lösen Sie die Gleichung

$$z^4 + 5z^2 - 36 = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Anleitung: Ersetzen Sie zunächst $z^2 = w$. Dann erhalten Sie eine quadratische Gleichung in w, die Sie lösen können. Sie erhalten zwei Lösungen w_1 und w_2. Durch das Lösen von $z^2 = w_1$ und $z^2 = w_2$ erhalten Sie schließlich (bis zu) 4 Lösungen $z_1, \ldots, z_4$ der ursprünglichen Gleichung. Fassen Sie diese Lösungen in einer Lösungsmenge zusammen.

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Verfahren Sie dabei wie in (a).

(c) Lösen Sie die Gleichung

$$z^4 - 9z^3 + 16z^2 + 26z = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Anleitung: Finden Sie durch Probieren zwei reelle Lösungen (versuchen Sie $-2, -1, 0, 1, 2$). Führen Sie dann eine Polynomdivision durch und lösen Sie die verbleibende quadratische Gleichung. Dabei treten dann komplexe Lösungen auf. Fassen Sie alle Lösungen in einer Lösungsmenge zusammen.

Aufgabe 24 **(4+6=10 Punkte)**

Berechnen Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrizen. Bestimmen Sie jeweils zu jedem Eigenwert den Eigenraum (d.h. die Menge der Eigenvektoren).

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Freitag, 20.11.2009 vor der Vorlesung