UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Johannes Lengler

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 6

Aufgabe 25 **(2+2+1+2+3=10 Punkte)**

Berechnen Sie alle reellen Eigenwerte der folgenden Matrizen. Bestimmen Sie jeweils zu jedem Eigenwert den Eigenraum (d.h. die Menge der Eigenvektoren).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Klammern Sie bei D gemeinsame Faktoren aus Ihren Zwischenergebnissen aus, bevor Sie ausmultiplizieren.

Aufgabe 26 **(3+3+4=10 Punkte)**

Lösen Sie diese Aufgabe, ohne zu rechnen. Greifen Sie stattdessen auf die Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren zurück.

(a) Die zugehörige lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einer 2×2-Matrix A ist die Spiegelung am Ursprung. Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von A. Geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.

(b) Die zugehörige lineare Abbildung $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einer 2×2-Matrix B ist die Drehung um $40°$ gegen den Uhrzeigersinn. Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von B. Geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.

(c) Die zugehörige lineare Abbildung $f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einer 2×2-Matrix C ist die Spiegelung an der x_2-Achse. Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von C. Geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.

Aufgabe 27 **(5+5=10 Punkte)**

Machen Sie sich vor der Lösung dieser Aufgabe nochmals klar, wie man die Determinate einer oberen Dreiecksmatrix berechnet.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{5} & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 10 & -\frac{12}{57} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

an (sie sollen nicht ausmultiplizieren) und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Was sind generell die Eigenwerte einer oberen Dreiecksmatrix ?

Aufgabe 28 **(1+5+4 = 10 Punkte)**

(a) Stellen Sie $n!$ (n-Fakultät) mit dem Produkzeichen dar.

(b) Berechnen Sie:

$$\sum_{i=0}^{5} i^2, \quad \sum_{k=-2}^{3} \sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right), \quad \sum_{l=4}^{1004} 5, \quad \prod_{n=2}^{5} \frac{n^2}{n^2+2n+1}, \quad \prod_{m=-1}^{3} m^5$$

(c) Rechnen Sie nach, dass $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Berechnen Sie damit einen geschlossenen Ausdruck für die Summe

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) \quad (n \in \mathbb{N} \text{ fest}).$$

Hinweis: Dies funktioniert genau wie die Rechnung in Beispiel 5.3.

Aufgabe 29 **(2+2+3+2+1=10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert der nachstehenden Folgen (in $\mathbb{R}$ oder $\pm\infty$).

(i) $\left(\frac{4n^3-3n^2+4}{-8n^3+6n}\right)_{n\geq 1}$

(ii) $\left(\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Betrachten Sie die nachstehenden Folgen. Stellen Sie eine Vermutung auf, ob die Folge konvergiert bzw. uneigentlich konvergiert, und was gegebenenfalls der jeweilige Grenzwert ist (dieser kann in $\mathbb{R}$ liegen, aber auch $\pm\infty$ sein). Beweisen Sie Ihre Vermutung nur unter Benutzung der Definition von Konvergenz (siehe 5.6). Benutzen Sie also insbesondere nicht die Grenzwertsätze.

(i) $\left((-1)^n \cdot n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (ii) $\left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ (iii) $\left(n-n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Abgabe: Freitag, 27.11.2009 vor der Vorlesung