UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Johannes Lengler

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 7

Aufgabe 30 **(1+2+2+2+3=10 Punkte)**

Bestimmen Sie den Grenzwert der nachstehenden Folgen (in $\mathbb{R}$ oder $\pm\infty$).

(a) $\left(\sqrt{\frac{3n^2+2n}{n-2}}\right)_{n\geq 3}$

(b) $\left(\frac{(-1)^n\cdot 12n+4}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (Hinweis: Benutzen Sie den Einschachtelungssatz 5.10.)

(c) $\left(-\frac{3^n}{n^3+7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (Benutzen Sie Satz 5.12.)

(d) $\left(\frac{2n^2\sin(n)-n^2\sqrt{n}+5}{n^2\sqrt{n}-4n}\right)_{n\geq 4}$ (Hinweis: Benutzen Sie den Einschachtelungssatz 5.10.)

(e) $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (Hinweis: Benutzen Sie den Einschachtelungssatz 5.10.)

Aufgabe 31 **(1+3+2+1+2=10 Punkte)**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 4, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}+2}.$$

(a) Berechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder mit Hilfe eines Taschenrechners.

(b) Zeigen Sie, dass alle Folgenglieder ≥ 2 sind. Dazu können Sie entweder (falls aus der Schule bekannt) *vollständige Induktion* benutzen, oder Sie können das folgende Argument verwenden: Wenn es ein Folgenglied < 2 gäbe, so gäbe es auch ein *erstes* Folgenglied mit dieser Eigenschaft, also ein a_n mit $a_n < 2$ und $a_{n-1} \geq 2$. Führen Sie dies auf einen Widerspruch.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von (b), dass die Folge streng monoton fallend ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Folge gegen einen Grenzwert konvergiert.

(e) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 32 **(2+2+3+3+3+3=20 Punkte, 2 Bearbeitungspunkte)**

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihen $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{5^{k+1}}$.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^3-k^2}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2n+1}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m-5}{m^2}$ (iv) $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{2l+3}{l^2+3l+2}$

Hinweis: Zeigen Sie in (i), dass $k^2 \le \frac{1}{2}k^3$ ist für $k \ge 2$, und nutzen Sie diese Abschätzung, um den Nenner durch einen einfacheren Ausdruck zu ersetzen. Etwas Ähnliches können Sie auch im Zähler tun. Dieselbe Technik kann Ihnen auch in Teil (iii) helfen. Alternativ können Sie auch das Vergleichskriterium einsetzen.

Aufgabe 33 **(10* Punkte)**

Bestimmen Sie zu der folgenden rekursiv definierten Folge eine geschlossene Formel:

$$a_0 = 4,\ a_1 = 0,\ a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

**Diese Aufgabe ist nicht verpflichtend. Wenn Sie diese Aufgabe bearbeiten, wird Ihnen aber selbstverständlich ein zusätzlicher Bearbeitungspunkt zuerkannt.*

Abgabe: Freitag, 04.12.2009 vor der Vorlesung