UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Johannes Lengler

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 8

Aufgabe 34 **(3+3+3+3+4+4=20 Punkte, 2 Bearbeitungspunkte)**

(a) Zeigen Sie mit dem Einschachtelungsprinzip, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n := \frac{2^n + n^2 \cos(\frac{\pi}{n})}{2^{n+1} + 4n - 3}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{8n+2}$ (*Hinweis:* Leibnizkriterium)

(ii) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{5^j}{j!}$ (*Hinweis:* Quotientenkriterium)

(iii) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2+5}{m^4+5}$ (*Hinweis:* Vergleichen Sie die Reihe mit $\sum \frac{1}{m^2}$)

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4^k}{k^2+5^k}$ (*Hinweis:* Vergleichen Sie die Reihe mit $\sum \left(\frac{4}{5}\right)^k$)

(v) $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+7}{l^2+7l+12}$ (*Hinweis:* Finden Sie eine geeignete Reihe, mit der Sie die angegebene Reihe vergleichen können.)

Aufgabe 35 **(2+2+2+2+2=10 Punkte)**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in $R \cup \{\pm\infty\}$, falls diese existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+3x}{(x+2)^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^3+5x}{4x^3-7x^2+5}$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \log\left(\frac{x^4+2}{x^3+1}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \cos\left(\frac{2\pi x+3}{x-2}\right)\right)$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\exp\exp -x^2$

Aufgabe 36 **(2+2+2+2+2=10 Punkte)**

(a) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}; x \mapsto c \cdot a^x$$

und

$$g : D \to \mathbb{R}; x \mapsto c \cdot \log_a(x)$$

für die Fälle

$$\text{(i) } c < 0,\ a > 1, \quad \text{(ii) } c > 0,\ 0 < a < 1, \quad \text{(iii) } c < 0,\ 0 < a < 1$$

an und skizzieren Sie jeweils den Funktionsgraphen.

(b) Lösen Sie die Gleichungen

(i) $13 \cdot 5^{3x} = 4^{x+1}$

(ii) $3 \cdot 2^x = 5^{2x^2}$ (Eine numerische Lösung genügt.)

(iii) $2^{(5^x)} = 7^{(2^x)}$

(iv) $\log(x + 2) = 1 + \log(3x)$

Aufgabe 37 **(5+2+3=10 Punkte)**

Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 20.000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 20 Minuten.

(a) Die Anzahl der Bakterien zur Zeit t wird durch die Funktion

$$f(t) = C \cdot a^t$$

(näherungsweise) bestimmt. Die Zeit t soll dabei in Minuten angegeben werden. Bestimmen Sie a und C.

(b) Wieviele Bakterien sind nach 5 Minuten bzw nach 3 Stunden vorhanden?

(c) Wann wird die Anzahl der Bakterien auf den Wert 10^8 gestiegen sein?

Abgabe: Freitag, 18.12.2009 vor der Vorlesung