



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2009/2010

Blatt 9

Aufgabe 38

(3+3+4=10 Punkte)

- (a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} x + 1 & , \quad x \leq 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & , \quad 0 < x < \pi \\ x & , \quad x \geq \pi \end{cases}$$
$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\exp(x) = 3x$$

(mindestens) eine Lösung $x \in]0, 1[$ hat.

Anleitung: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz, um zu zeigen, dass die Funktion $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) - 3x$ eine Nullstelle hat.

Aufgabe 39

(2+2+2+2+2=10 Punkte)

Stellen Sie fest, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls. Bestimmen Sie zunächst jeweils den Definitionsbereich der entsprechenden Funktionen und formen Sie die Terme geschickt um, bevor Sie die Grenzwertregeln oder die Grenzwertdefinition verwenden.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$$
$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (e) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

Aufgabe 40

(2+2+2+2+2= 10 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

$$(a) f_1(x) = \frac{\exp x}{x^2} \quad (b) f_2(x) = \log(\exp(x) \cdot x) \quad (c) f_3(x) = \tan^2(x)$$

$$(d) f_4(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}} \quad (e) f_5(x) = 2^x$$

Hinweis zu (e): Betrachten Sie die Definition von a^x aus der Vorlesung.

Aufgabe 41

(2+2+2+2+2=10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1 - x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{x^2} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \exp(\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$$
$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 - x^2} \quad (e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot \sin \left(-\frac{1}{x} \right) \right)$$

Aufgabe 42

(3+3+4=10 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Monotonieintervalle folgender Funktionen:

$$(a) f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2$$
$$(b) f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \cdot \exp(1 - x)$$
$$(c) f_3 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Aufgabe 43

(10* Punkte)

Der Weihnachtsmann macht sich mit seinem Rentier Rudolph auf den Weg zu den Wichteln, um den Schlitten mit den Geschenken abzuholen. Wie jeder weiß, ist der Weihnachtsmann nun auch nicht mehr der Jüngste. Er läuft mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu dem 3 km entfernten Wichtelhaus. Sein Rentier hingegen, frisch und ausgeruht, springt mit 6 km/h durch den Wald. Sie starten gleichzeitig. Um sich mal so richtig auszutoben, läuft Rudolph schnurstracks zum Wichtelhaus, dreht dort um, läuft zurück zum Weihnachtsmann, dreht wieder um, läuft zum Wichtelhaus, zurück zum Weihnachtsmann, und so weiter. Wieviel Kilometer ist Rudolph wohl gelaufen, wenn der Weihnachtsmann am Wichtelhaus ankommt? Die Zeit, die das Rentier zum Wenden braucht, soll vernachlässigt werden (Rudolph ist in der Tat äußerst wendig und flink).

Lösen Sie die Aufgabe zunächst, indem Sie eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ aufstellen, bei der s_k die Länge des Wegstücks ist, das Rudolph beim k -ten Mal vom Weihnachtsmann hin und zurück zum Wichtelhaus zurücklegt. Berechnen Sie dann den Wert dieser Reihe.

Kann man die Aufgabe auch einfacher lösen ?

**Diese Aufgabe ist nicht verpflichtend. Wenn Sie diese Aufgabe bearbeiten, wird Ihnen aber selbstverständlich ein zusätzlicher Bearbeitungspunkt zuerkannt.*

Abgabe: Freitag, 08.01.2010 vor der Vorlesung



**Frohe Weihnachten und
ein schönes und erfolgreiches Neues Jahr !**

