Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Klausur
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

Zur Klausur: Nachfolgend finden Sie 8 Aufgaben zu je 10 Punkten. Es werden die 6 besten Aufgaben gewertet (, d.h. sie können maximal 60 Punkte erreichen). Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *(10 = (2+3) + (2+3) Punkte)*

a) Gegeben sei die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x + y).$$

  i) Untersuchen Sie ϕ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivtät (Begründung!).
  ii) Bestimmen Sie die Menge $(\phi^{-1}((13, 1)) \cup \phi^{-1}((5, -1))) \cap (\{1, 2, 3, 4\} \times \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\})$ durch Aufzählung ihrer Elemente.

b) Betrachten Sie die folgenden Teilmengen in $\mathbb{R}^2$:

  i) $M_1 := \{(t^2, t) \in \mathbb{R}^2 | t \in [-1, 1]\}$,
  ii) $M_2 := \{(\cos(2x), \sin(2x)) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \pi/2\}$.

Untersuchen Sie mit Begründung, ob die obigen Mengen Graphen von Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}$ mit geeigneten Mengen $D \subset \mathbb{R}$ sind. Geben Sie im Falle der Existenz ein Beispiel für f an.

Aufgabe 2. *(10 = (1+1+1+2) + (1+2+2) Punkte)*

a) Drücken Sie die folgenden komplexen Zahlen z als $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ aus:

$$(1 + 2i)(3 + 4i), \qquad \frac{-3 + 7i}{1 + i}, \qquad i^{15} + i^{21}, \qquad (1 - e^{-i\frac{\pi}{2}})^{11}\,.$$

b) Schreiben Sie die folgenden Zahlen als $re^{i\phi}$ mit $r > 0$ und $0 \leq \phi < 2\pi$:

$$15i^2, \qquad \left(2e^{i\frac{\pi}{15}}\right)^{-5} \cdot e^{i\frac{7\pi}{3}}, \qquad \cos(-5) + i\sin(5).$$

Aufgabe 3. *(10 = 2 + 4 + 4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z^4 = -16\,.$$

(Geben Sie stets z in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.)

b) Finden Sie alle komplexen Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit

$$w^2 - 6w + 10 = 0.$$

c) Finden Sie alle komplexen Zahlen z, die um 2 vermindert gleich ihrem Kehrwert multipliziert mit -5 sind.

Aufgabe 4. *(10 = (1+ 2 + 4) + 3 Punkte)*

a) Die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen sind alle konvergent. Dabei ist für $n \in \mathbb{N}$

i) $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$,

ii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} 0.5^k$,

iii) $2a_{n+1}a_n - a_n^2 - 2 = 0$ im Falle $n \geq 1$ und es ist $a_1 = 1$.

Berechnen Sie die Grenzwerte (Begründung!).

b) Berechnen Sie den Grenzwert der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}.$$

Aufgabe 5. *(10 = (2+2+2) + (2+2) Punkte)*

a) Betrachten Sie die Funktion $f(x) := e^{-x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) und ihren Graphen, die *Gaußglocke*.

i) Wo hat die Gaußglocke waagerechte Tangenten, wo erreicht f seinen maximalen Funktionswert? Besitzt f einen minimalen Funktionswert?

ii) Wo besitzt f Wendepunkte und wie groß ist dort die Tangentensteigung? Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Tangentensteigung maximal, wo ist sie minimal?

iii) Wie ist das Verhalten von f für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$? Skizzieren Sie f.

b) Zum Zeitpunkt t liege die Menge $a \cdot e^{-bt}$ einer radioaktiven Substanz vor (a, b reell und positiv). Zu welchem Zeitpunkt ist die Restmenge auf

i) die Hälfte,

ii) ein Prozent

des Anfangswertes zum Zeitpunkt $t = 0$ zurückgegangen?

Aufgabe 6. *(10 = 4 + 3 + 3 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion f um x_0, wobei

i) $f(x) = \ln(x)$ und $x_0 = e$ ist,

ii) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $x_0 = 0$ ist.

b) Sie wollen quaderförmige Kartons mit quadratischer Grundfläche und festem Volumen $V > 0$ herstellen, so dass die Summe aller Kantenlängen minimal ist. Wie müssen Sie die Maße Ihres Kartons in Abhängigkeit von V wählen?

Aufgabe 7. *(10 = 3 + 4 + 3 Punkte)* Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{(e-1)^{\frac{1}{3}}} \frac{x^2}{x^3+1} dx$,

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + \frac{\pi}{2}) \cdot e^{\sin(x)} dx$,

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cdot \cos(2x) + \sin(x)) dx$.

Aufgabe 8. *(10 = 2+2+2+4 Punkte)* Es seien g_1, g_2, g_3 die Geraden in $\mathbb{R}^2$ mit folgender Beschreibung:

- g_1 hat die Gleichung $x_2 = -2x_1 + 6$,
- $g_2 = \{(1, -1) + t(1, 3) | t \in \mathbb{R}\}$,
- g_3 geht durch die Punkte $(-1, 3)$ und $(5, 6)$.

a) Die drei Geraden schneiden sich paarweise und legen ein Dreieck fest. Wie lauten die Eckpunkte des Dreiecks?

b) Was sind die Seitenlängen des Dreiecks?

c) Wie lauten die Innenwinkel des Dreiecks?

d) Finden Sie alle Werte t, für welche die Parabel mit Gleichung $x_2 = -(x_1 - t)^2 + 4$ die Gerade g_1 berührt (d.h. genau einen Punkt P_t mit g_1 gemeinsam hat), und bestimmen Sie die zugehörigen Berührpunkte P_t.