Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 11
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

Aufgabe 1. *(20 = 10 + 10 Punkte)* Im Folgenden sehen Sie zwei Näherungsformeln für das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ aufgelistet, wobei wir die 5 Funktionswerte $f(x_i)$ mit $i = 0,1,2,3,4$ und $x_i = a + ih, h = \frac{b-a}{4}$ kennen.

- (Polygonzug-Regel)
$$I(f) \sim \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)),$$
- (Newton-Cotes-Formel)
$$I(f) \sim \frac{2h}{45}(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)).$$

Verwenden Sie beide Verfahren zur Berechnung von $\int_{-1}^1 \cos(x)dx$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Wert! Sie dürfen die üblichen technischen Hilfsmittel wie den Taschenrechner oder den Computer verwenden und sollten Ihre Näherungswerte auf mindestens 4 Stellen hinter dem Komma genau angeben! Versuchen Sie, heuristische Begründungen für die Regeln zu geben.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)* (Gauß-Quadratur mit Exaktheit für Polynome vom Grad ≤ 3) Zu einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Näherungsregel
$$\int_{-1}^1 f(x)dx \sim f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$
Rechnen Sie nach, dass diese sogar exakt ist für Polynome vom Grad ≤ 3.

Aufgabe 3. *(15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 Punkte)* Finden Sie Stammfunktionen (mit Nachweis !) für die folgenden Funktionen auf geeigneten Definitionsbereichen:

a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$,

b) $f(x) = (1 - \beta x) \cdot \cos(\alpha x)$ (α, β fest),

c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$,

d) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$,

e) $f(x) = x \cdot \ln(x^2 + 2)$.

[Hinweise: Verwenden Sie bei a),b) partielle Integration und bei c) bis e) Integration durch Substitution. Finden Sie bei e) zunächst eine Stammfunktion von $\ln(x)$, z.B. durch partielle Integration.]

Abgabe: Freitag den 25.01.08 (vor der Vorlesung)