Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 14
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

Aufgabe 1. *(20 = 10 + 10 Punkte)* Es sei $S := \{\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \underline{x}^{(3)}\} \subset \mathbb{R}^4$ mit $\underline{x}^{(1)} := (1,1,1,1)$, $\underline{x}^{(2)} := (2,0,1,1), \underline{x}^{(3)} := (1,1,-1,3)$ und $U := \langle S \rangle$ der von den Vektoren in S aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

a) Finden Sie paarweise orthogonale Vektoren $\underline{y}^{(1)}, \underline{y}^{(2)}, \underline{y}^{(3)} \in \mathbb{R}^4$ mit $\left\|\underline{y}^{(i)}\right\| = 1$ für $i = 1, 2, 3$, die U ebenfalls aufspannen.

b) Beschreiben Sie die *Projektion* von $\mathbb{R}^4$ auf U, d.h. die Abbildung $P_U : \mathbb{R}^4 \to U, \underline{y} \mapsto \underline{y}^U$, wobei $\underline{y}$ zerlegt wird als $\underline{y} = \underline{y}^U + \underline{y}^{U^\perp}$ mit $\underline{y}^U \in U$ und $\underline{y}^{U^\perp} \in U^\perp$ wobei

$$U^\perp := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 | \underline{x} \text{ steht senkrecht auf allen } \underline{y} \in U\}$$

sei, mit Hilfe der Vektoren $\underline{y}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2. *(25 = 4x5 + 5 Punkte)* Gegeben sei die Menge

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ ganzrational vom Grad } \leq 3\}.$$

a) Weisen Sie nach, dass V ein Vektorraum ist.

b) Rechnen Sie nach, dass auf V durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt gegeben ist, d.h. dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symmetrisch und bilinear ist und dass $\langle f, f \rangle > 0$ für $f \neq 0$ gilt.

c) Wir setzen $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ für f aus V. Zeigen Sie, dass die Schwarzsche Ungleichung

$$\langle f, g \rangle \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

gilt.

d) Rechnen Sie nach: Die Menge $ON = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1), \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3-3x)\}$ bildet ein Orthonormalsystem, d.h. für $f, g \in ON$ mit $f \neq g$ gilt $\langle f, g \rangle = 0$, wogegen $\langle f, f \rangle = 1$ gilt für $f \in ON$.

e) (**Bonusaufgabe**) In analoger Weise wie in Aufgabe 1b) können wir auch hier die Projektionsabbildung P_U betrachten, und zwar diesmal für den Untervektorraum $U = \langle \{1, x, x^2\} \rangle$ von V. Was ist $P_U(f)$ für $f = x^3 - 2x^2 + x + 1$? Was für eine Bedeutung hat $P_U(f)$?

Abgabe: Freitag den 15.02.08 (vor der Vorlesung)