Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

# Übung 4
## zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

**Aufgabe 1.** *(8 = 2+2+2+2 Punkte)*

a) Formen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Potenzrechenregeln der Vorlesung unter Angabe aller Zwischenschritte so um, dass schlussendlich eine Potenz $a^b$ mit natürlichen Zahlen $a, b$ dasteht!

$$5^9 \cdot \left(e^2\right)^{-2^2 ln(5)} \cdot 5^{-1}, \quad \sqrt{72}^{27} \cdot 6^5 \cdot \sqrt{32}, \quad 2^{2^{log_2(5)+log_2(3)}+1} \cdot \left(2^{-2^2}\right)^4.$$

b) Bestätigen Sie, dass $log_{10}(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt!

**Aufgabe 2.** *(8 = 3+3+2 Punkte)*
Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf Beschränktheit nach oben und unten; geben Sie gegebenenfalls das Supremum bzw. das Infimum an und auch, ob diese in der jeweiligen Menge liegen!

a) $M_1 = \{Re(e^{i\phi}) | -\frac{\pi}{3} < \phi \leq \frac{\pi}{4}\}$,

b) $M_2 = \{x + y^2 | x, y \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 2, |y - 2| \leq 4\}$,

c) $M_3 = \{\frac{2^n}{n} | n \in \mathbb{N}\}$.

**Aufgabe 3.** *(10=4+2+4 Punkte)*

a) Begründen Sie, oder widerlegen Sie durch ein Beispiel:

  i) Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f|_{(-\infty,0]}$ und $f|_{(0,\infty)}$ strikt monoton ansteigen, wobei $f$ selbst zwar monoton ansteigt, aber nicht strikt monoton ansteigt.

  ii) Für eine ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt stets $f(0) = 0$.

b) Geben Sie eine strikt monoton fallende Funktion an, die nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt ist, die bei $x = 3$ den Wert 5 besitzt und so dass $inf(\{f(x) | x \in \mathbb{R}\} = 4$ gilt!

**Aufgabe 4.** *(14 = 1+3+4+6 Punkte)* Der folgende Algorithmus ("euklidischer Algorithmus") berechnet den ggT (d.h. den größten gemeinsamen Teiler) zweier Zahlen $f, g \in \mathbb{N}$ mit $f \geq g \neq 0$:

(1) Setze $i = 0$,$a_0 = f$,$a_1 = g$;

(2) Teile $a_i$ mit Rest durch $a_{i+1}$, d.h. berechne
$a_i = q_i a_{i+1} + r_i$ mit $0 \leq r_i < a_{i+1}$;

(3) Ist $\begin{cases} r_i \neq 0 \text{ , so setze } a_{i+2} = r_i, \text{ erhöhe } i \text{ um 1 und gehe zu (2);} \\ r_i = 0, \text{ so gehe zu (4);} \end{cases}$

(4) Gebe $a_{i+1}$ aus!

Es gilt nämlich zunächst $ggT(f, g) = ggT(a_0, a_1) = ggT(a1, a_2) = ... = ggT(a_i, a_{i+1})$ für jedes $i > 0$. Außerdem gilt stets nach endlich vielen Schritten $r_i = 0$ für ein $i$ und da in diesem Fall $a_i = q_i a_{i+1}$ gilt, ist $ggT(a_i, a_{i+1}) = a_{i+1}$.

Führen Sie das Verfahren durch (d.h. geben sie die auftretenden Ziwschenwerte $a_i$ an) für:

a) $f = 221, g = 91$

b) $f = 551359, g = 54113$

Berechnen Sie nun mit dem "entsprechenden" Verfahren den ggT der Polynome $f$ und $g$ aus $\mathbb{R}[X]$ für

c) $f(X) = X^{12} - 1, g(X) = X^8 - 1$

d) $f(X) = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4,$
$g(X) = X^3 - 8X^2 + 21X - 18$

*Hinweis:* Weil der ggT sich nicht ändert, wenn Sie eines der Polynome mit einem Skalar $c \neq 0$ multiplizieren, können Sie für jedes $i$ das Polynom $a_i$ durch das zugehörige normierte Polynom $\tilde{a}_i$ ersetzen, d.h. Sie setzen $\tilde{a}_i(X) = \alpha_d^{-1} a_i(X)$, falls $d = deg(a_i)$ und $\alpha_d$ der Koeffizent bei $X^d$ von $a_i$ ist.

**Abgabe:** Freitag den 23.11.2007 (vor der Vorlesung)