Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Bernd Mehnert

Übung 5
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

Aufgabe 1. *(10 = 1+2+3+2+2 Punkte)*

a) Ihnen sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Zahl a vorgelegt. Wann konvergiert nach Definition (a_n) gegen a?

b) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt und (a_n) gegeben durch $a_n := c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ gilt.

c) Gegeben sei weiter die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{ln(n)+1} + 2$ für $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, dass (a_n) gegen 2 konvergiert.

d) Benutzen Sie die Grenzwertsätze und die schon in der Vorlesung oder in dieser Aufgabe berechneten Limites, um die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu bestimmen:

   i) $a_n := f(1 + \frac{1}{n})$, wobei $f(X) := X^3 + X + 1$,
   ii) $a_n := 47 + \sum_{k=0}^{n}(2^{-k} - 3^{-k})$.

Aufgabe 2. *(20 = 2+4+4+6+4 Punkte)* Gegeben seien die Zahlen $F_0, F_1, F_2, ...$ mit

$F1)$ $\quad F_0 := 0, F_1 := 1,$

$F2)$ $\quad F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$ für $n \geq 2$.

Die Zahlen F_n heißen *Fibonacci-Zahlen*.

a) Bestimmen Sie $F_0, F_1, F_2, ..., F_{13}$ explizit!

b) Es sei $a_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1}a_n = a_n + 1.$$

c) Nehmen Sie nun an, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre konvergent. Welchen Grenzwert ϕ besäße (a_n) dann?

   [Hinweis: Benutzen Sie b) und die Grenzwertrechenregeln!]

d) Begründen Sie per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass

$$F_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

   gilt!

e) Begründen Sie mit Hilfe der Indentität in d), dass (a_n) gegen ϕ konvergiert, insbesondere also konvergent ist.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Begründen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach unten beschränkte, monoton fallende Folge, so ist (a_n) konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}.$$

Die folgende Aufgabe wird nicht bepunktet, aber bei Bearbeitung korrigiert!

Bonusaufgabe: Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$H1)\quad x_0 := 1,$

$H2)\quad x_n := \frac{x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}}{2}$ für $n \geq 1$.

Wie wir gleich sehen werden, konvergiert diese Folge sehr schnell gegen $\sqrt{a}$, liefert uns also insbesondere sehr schnell gute Approximationen von $\sqrt{a}$ durch Brüche.

a) Es sei $a = 2$. Geben Sie die ersten 4 Glieder x_1, x_2, x_3, x_4 unserer Folge (x_n) für dieses a auf 12 geltende Ziffern hinter dem Komma genau an[1] und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit

$$\sqrt{2} = 1.4142135623731\ldots .$$

b) Begründen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

i) $\sqrt{a} \leq x_n$,

ii) $x_{n+1} \leq x_n$.

(Hinweis: Benutzen Sie für i) die Ungleichung $\frac{r+s}{2} \geq \sqrt{rs}$ (mit $r, s \geq 0$).)

c) Folgern Sie aus Aufgabe 3) und Teil b), dass (x_n) konvergiert und berechnen Sie anhand der Eigenschaft H2) und den Grenzwertsätzen den Grenzwert von (x_n)!

d) (Diskussion des Fehlers) Es sei $f_n := x_n - \sqrt{a} \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Begründen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_{n+1} = \frac{f_n^2}{2x_n} \leq \frac{f_n^2}{2\sqrt{a}}.$$

(D.h. insbesondere, dass falls $\frac{1}{2\sqrt{a}} \leq 1$ ist und der Fehler f_n für ein n_0 die Beziehung $f_{n_0} \leq 10^{-1}$ erfüllt, wir $f_{n_0+1} \leq (10^{-1})^2 = 10^{-2}, f_{n_0+2} \leq (10^{-2})^2 = 10^{-4}$ und allgemein $f_{n_o+m} = 10^{-2^m}$ haben!)

Abgabe: Freitag den 30.11.2007 (vor der Vorlesung)

[1] Sie dürfen dazu einen Taschenrechner, einen Computers oder eine Tafel verwenden!