



Übung 6 zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler I (WS 07/08)

Aufgabe 1. (20 = 3+3+3+3+4+4 Punkte) Untersuchen Sie die anschließend beschriebenen Folgen (a_n) auf Konvergenz bzw. uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte bzw. uneigentlichen Grenzwerte: Für $n \in \mathbb{N}$ erfülle a_n

- a) $a_n = \frac{1+n}{n^2+2}$,
- b) $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$,
- c) $a_n = \frac{4^n}{2^n+3^n}$,
- d) $a_n = 1 + \frac{(-2)^n + \sin(1/n)}{3^n}$,
- e) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$,
- f) $1 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{n+3}{n+2}$.

[Hinweis zu e): Schreiben Sie das n in der Basis als Potenz von 2 und begründen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n)}{n} = 0$.]

Aufgabe 2. (20 = 6+1+3+2+2+2+4 Punkte)

- a) Es sei $M \subset \mathbb{R}$. Versuchen Sie eine Definition für “ ∞ (bzw. $-\infty$) ist Berührungspunkt von M ” zu finden. Finden Sie ein M , welches genau 3 Berührungspunkte in $\mathbb{R} \setminus M$ besitzt und nach Ihrer Definition genau einen aus $\{-\infty, \infty\}$!
- b) Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und a ein Berührungspunkt von D . Definieren Sie nochmals, was $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ oder $c \in \{-\infty, \infty\}$ bedeutet. Gehen Sie auch auf die Limesbildungen “ $\lim_{x \nearrow a}$ ” und “ $\lim_{x \searrow a}$ ” ein!
- c) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. Existiert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
[Hinweis: Finden Sie zwei konvergente Folgen $(a_n), (b_n)$ aus $\mathbb{R} - \{0\}$, die gegen 0 konvergieren und so dass $\sin(a_n) \rightarrow 0$ und $\sin(b_n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ gilt.]
- d) Im Folgenden sehen Sie Limeses von Funktionen aufgelistet. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionen an und untersuchen sie die Limeses bzw. uneigentlichen Limeses auf Existenz! Im Falle der Existenz: Was sind die Grenzwerte bzw. uneigentlichen Grenzwerte?

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 7x + 1}{2x^4}, \quad \text{ii) } \lim_{x \searrow 0} e^{-\frac{1}{x}}, \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

- e) Folgern Sie durch rein geometrische Betrachtungen am Einheitskreis $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$.

Abgabe: Freitag den 7.12.2007 (vor der Vorlesung)