Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Klausur
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Zur Klausur: Nachfolgend finden Sie 8 Aufgaben zu je 10 Punkten. Es werden die 6 besten Aufgaben gewertet (d.h. sie können maximal 60 Punkte erreichen). Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *(10 = 5+1+3+1 Punkte)*
Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die zugehörige lineare Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{R}^2$, so dass die Darstellungsmatrix D von φ_A bezüglich $\mathscr{B}$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch die Matrix D an.

b) Geben Sie die Basiswechselmatrix S von der Basis $\mathscr{B}$ zur Standardbasis $\mathscr{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^2$ an.

c) Bestimmen Sie die inverse Matrix S^{-1}.

d) Drücken Sie den Zusammenhang zwischen A, D und S in einer Formel aus.

Aufgabe 2. *(10 = 5+5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} -2 & x & 7 \\ x-3 & x-1 & 5 \\ x-1 & -1 & x-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie für $x = 1$ die inverse Matrix zu $A(x)$.

Aufgabe 3. *(10 =5+5 Punkte)*
Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(x) \cdot y^2$$

und

$$\underline{\Phi} : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \underline{\Phi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f und $\underline{\Phi}$ in jedem Punkt des jeweiligen Definitionsbereiches.

b) Berechnen sie mit Hilfe von Teil (a) und der Kettenregel den Gradienten der Funktion

$$g : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \exp(r \cdot \cos\varphi) \cdot (r \cdot \sin\varphi)^2$$

in jedem Punkt des Definitionsbereiches.

Aufgabe 4. *(10 = 6+4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie zu der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + 3y^2 + 4z^2}$$

das Taylorpolynom ersten Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (3,2,1)$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) eine Näherung für $\sqrt{(2.95)^2 + 3 \cdot (2.05)^2 + 4 \cdot (0.9)^2}$.

Aufgabe 5. *(10 = Punkte)*
Welche Seitenlängen a, b, c hat ein Quader maximalen Volumens, der sich in die Einheitshalbkugel

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$$

einbeschreiben lässt. (Die Grundfläche des Quaders soll in der (x,y)-Ebene liegen.)

Aufgabe 6. *(10 = 4+3+3 Punkte)*
Betrachten Sie die stetig differenzierbare Funktion

$$\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{f}(\underline{x}) = \left(x_2 + x_3^2, x_1, 2x_1x_3\right).$$

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ von f für $1 \le i, j \le 3$ und begründen Sie, dass $\underline{f}$ ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimmen Sie ein Potential $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ von $\underline{f}$.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\underline{u}} \underline{f}(\underline{x})\, d\underline{x}$ für

$$\underline{u} : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. *(10 =5+5 Punkte)*
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme. Geben Sie dabei auch jeweils ein maximales Intervall an, auf dem die Lösung definiert ist.

a) $y' = x \cdot e^y, \quad y(-1) = 0.$

b) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1.$

Aufgabe 8. *(10 = 2+2+3+3 Punkte)*

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 4 Würfen mit jeweils 2 Würfeln genau zweimal einen Pasch (gleiche Augenzahl) zu erzielen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Skatspiel (32 verschiedene Karten, davon 4 Buben, die Hand enthält 10 Karten) genau 3 Buben auf die Hand zu bekommen?
Bonusaufgabe: Begründen Sie durch Überschlagsrechnungen, welcher der 3 Werte 0.01, 0.003, 0.001 am nächsten bei der gesuchten Wahrscheinlichkeit liegt. (Sie können hiermit 2 Bonuspunkte erzielen.)

c) Bei einem gegebenen Versuchsaufbau zeigt ein Geigerzähler im Mittel pro Zeiteinheit genau 2 Ereignisse an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in einer gegebenen Zeiteinheit mindestens 2 Ereignisse anzeigt?

d) Bei einem Würfelspiel mit 2 Würfeln erhält Anna von Bastian 2,50 Euro, wenn die Summe der Augenzahlen mindestens 9 ist. Andernfalls erhält Bastian von Anna einen Euro. Welche Gewinn- oder Verlusterwartung hat Anna nach 10 Durchgängen?