Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Probeklausur
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Hinweise: In der regulären Klausur würde insbesondere gelten:

- Sie haben 3 Stunden Bearbeitungszeit für die Klausur.
- Es gibt insgesamt 8 Aufgaben, von denen nur die 6 besten bearbeiteten Aufgaben gewertet werden. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben (insbesondere können Sie also höchstens 60 Punkte erreichen).
- Als Hilfsmittel ist lediglich ein handeschriebenes Din A4 Blatt zugelassen (insbesondere also kein (!) Taschenrechner).
- Ein eingeschaltetes Handy oder Abschreiben beim Nachbarn führen zum vorzeitigen Ende Ihrer Klausur und zur Bewertung mit 0 Punkten.

Aufgabe 1. *(10 = 5+4+1 Punkte)*
Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die zugehörige lineare Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \underline{x} \mapsto A \cdot \underline{x}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{R}^2$, so dass die Darstellungsmatrix D von φ_A bezüglich $\mathscr{B}$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie auch die Matrix D an.

b) Geben Sie die Basiswechselmatrix C von der Standardbasis $\mathscr{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^2$ zur Basis $\mathscr{B}$ an.

c) Drücken Sie den Zusammenhang zwischen A, D und C in einer Formel aus.

Aufgabe 2. *(10 = 5+5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $t \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ t-3 & t+3 & 0 \\ -t+1 & -1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie für $t = 2$ die inverse Matrix zu $A(t)$.

Aufgabe 3. *(10 =5+5 Punkte)*
Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 \cdot (3y-1)$$

und

$$\underline{\Phi} : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \underline{\Phi}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f und $\underline{\Phi}$ in jedem Punkt des jeweiligen Definitionsbereiches.

b) Berechnen sie mit Hilfe von Teil (a) und der Kettenregel den Gradienten der Funktion

$$g : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = (r\sin\varphi)^2 \cdot (3r\cos\varphi - 1)^2$$

in jedem Punkt des Definitionsbereiches.

Aufgabe 4. *(10 = 6+4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie zu der Funktion

$$f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^3}{y^2}$$

das Taylorpolynom ersten Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (2,1)$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) eine Näherung für $\frac{(1.9)^3}{(1.05)^2}$.

Aufgabe 5. *(10 = Punkte)*
Es sei

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 1 - x^2 - y^2\right\}$$

ein Paraboloid in $\mathbb{R}^3$ und a, b positive reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 < 1$. Ein Quader Q habe die 4 Eckpunkte $(\pm a, \pm b, 0)$ in der (x,y)-Ebene und die 4 Eckpunkte $(\pm a, \pm b, 1 - a^2 - b^2)$ in P. Wie müssen a und b gewählt werden, damit das Volumen von Q maximal wird.

Aufgabe 6. *(10 = 4+3+3 Punkte)*
Betrachten Sie die stetig differenzierbare Funktion

$$\underline{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{f}(\underline{x}) = \left(-e^{x_2}, -x_1 e^{x_2} + x_3^2, 2x_2x_3\right).$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\underline{f}$ und begründen Sie, dass $\underline{f}$ ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimmen Sie ein Potential $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ von $\underline{f}$.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\underline{u}} \underline{f}(\underline{x})\, d\underline{x}$ für

$$\underline{u} : [0,2] \to \mathbb{R}^3,\ \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(\pi t) \\ \exp\left(\frac{t^2}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. *(10 =5+5 Punkte)*
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme. Geben Sie dabei auch jeweils ein maximales Intervall an, auf dem die Lösung definiert ist.

a) $y' = \frac{1+y^2}{xy}, \quad y(1) = 2.$

b) $y' = y^2 + 4y - 5, \quad y(0) = -2,\ y'(0) = -4.$

Aufgabe 8. *(10 = 2+2+3+3 Punkte)*

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 4 Würfen mit jeweils 2 Würfeln mindestens zweimal einen Pasch (gleiche Augenzahl) zu erzielen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Lottoziehung (6 Kugeln aus 49) genau eine Richtige (von 6 Richtigen) zu ziehen?
Bonusaufgabe: Begründen Sie durch Abschätzungen, ob die gesuchte Wahrscheinlichkeit größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. (Sie könnten hiermit 2 Bonuspunkte erzielen, die nicht in die Gesamtpunktzahl eingehen.)

c) Bei einem gegebenen Versuchsaufbau zeigt ein Geigerzähler im Mittel pro Zeiteinheit genau 2 Ereignisse an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in einer gegebenen Zeiteinheit 0 Ereignisse anzeigt?

d) Bei einem Würfelspiel mit 2 Würfeln erhält Anna von Bastian einen Euro, wenn (mindestens) eine der beiden Augenzahlen 1 oder 5 ist. Andernfalls erhält Bastian von Anna 1,20 Euro. Welche Gewinn- oder Verlusterwartung hat Anna nach 10 Durchgängen?