Gegeben sei ein n-dimensionaler Vektorraum V mit einer Basis $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n\}$. Jeder Vektor $\underline{v} \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung

(1) $$\underline{v} = \sum_{1 \le i \le n} v_i \underline{x}_i$$

mit den *Koordinaten* $v_1, \ldots, v_n$ bzgl. $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n\}$. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V$ wird bzgl. $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n\}$ durch eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ gegeben, nämlich

(2) $$\varphi(\underline{x}_j) = \sum_{1 \le i \le n} a_{ij} \underline{x}_i.$$

Hat $\underline{v}$ Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$ und $\varphi(\underline{v})$ Koordinaten $w_1, \ldots, w_n$, so ist

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Sei jetzt $\{\underline{x}'_1, \ldots \underline{x}'_n\}$ eine weitere Basis von V. Wie sieht die Beschreibung von $\underline{v}$ bzw. $\varphi(\underline{v})$ bzgl. dieser neuen Basis aus?

Zunächst ist

(3) $$\underline{x}'_j = \sum_{1 \le i \le n} c_{ij} \underline{x}_i$$

mit einer Matrix $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ebenso

(4) $$\underline{x}_k = \sum_{1 \le j \le n} d_{jk} \underline{y}'_j \quad \text{mit } (d_{jk}) = D \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen und eine kleine Rechnung:

$$CD = E_n = \text{die } n \times n\text{-Einheitsmatrix},$$

d.h. C und D sind invertierbar, $D = C^{-1}$. Die Matrix C heißt *Basiswechselmatrix von* $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n\}$ *nach* $\{\underline{x}'_1, \ldots, \underline{x}'_n\}$.

Hat $\underline{v}$ bzgl. $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n\}$ die Koordinaten $v_1, \ldots, v_n$, bzgl. $\{\underline{x}'_1, \ldots, \underline{x}'_n\}$ die Koordinaten $v'_1, \ldots, v'_n$, so ist

(5) $$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} \text{ bzw. } C^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}.$$

Ist weiter $A' = (a'_{ij})$ die Matrix von φ bzgl. $\{\underline{x}'_1, \ldots, \underline{x}'_n\}$, d.h.

(2′) $$\varphi(\underline{x}'_j) = \sum_{1 \le i \le n} a'_{ij} \underline{x}'_i,$$

so ist

(6). $$A' = C^{-1} A C.$$