Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 10
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(5×5=25 Punkte)* Bestimmen Sie eine Lösung zu den folgenden Anfangswertproblemen und ein maximales Intervall für den Definitionsbereich Ihrer Lösung.

a) $y' = -3x^2y^2, \quad y(2) = 1.$

b) $y' = \frac{\sqrt{y}}{1+x}, \quad y(0) = 4.$

c) $y' = \frac{\sqrt{y}}{1+x}, \quad y(-2) = 4.$

d) $y' = e^y \cdot \sin x, \quad y(0) = -\ln 2.$

e) $y' = x \cdot (y^2 + 2y), \quad y(0) = \frac{2e^{-1}}{1-e^{-1}}.$

Aufgabe 2. *(5+10=15 Punkte)*

a) In einem Labor gedeiht eine Kolonie des Bakteriums *Ewald* unter konstanten, idealen Bedingungen, d.h. unbegrenzte Nährstoffmenge, genügend Platz und was *Ewald* sonst so braucht. Der Populationsumfang der Kolonie in Abhängigkeit von der Zeit t soll durch die Funktion $N = N(t)$ beschrieben werden. Dabei ist anzunehmen, dass der Zuwachs pro Zeiteinheit proportional zur vorhandenen Koloniestärke ist. Zu Beginn des Experiments ($t = 0$) soll die Anzahl der vorhandenen *Ewalds* gerade N_0 sein.
Modellieren Sie diese Annahmen in einem Anfangswertproblem und lösen Sie dieses.
Der Populationsumfang hat sich nach 7 Tagen verdoppelt. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante und skizzieren Sie $N(t)$ für $N_0 = 100.000.000$.

b) In einem zweiten Versuch werden *Ewald* nicht mehr ideale Bedingungen zur Verfügung gestellt, sondern nur noch eine begrenzte Nährstoffmenge. In diesem Fall kann man annehmen, dass der Zuwachs pro Zeiteinheit proportional zu den freien Ressourcen $R = k \cdot (N_{\text{max}} - N)$ und nach wie vor proportional zur vorhandenen Anzahl N ist (also insgesamt proportional zu $(N_{\text{max}} - N) \cdot N$). Wie in (a) bezeichne $N_0 = N(t = 0)$ den Anfangsbestand der Kolonie.
Stellen Sie auch hierzu eine Anfangswertproblem auf und bestimmen Sie die Lösung.
Sei nun $N_0 = 100.000.000$ und $N_{\text{max}} = 600.000.000$. Man beobachtet nach 2 Tagen einen Bestand von $1.200.000$ *Ewalds*. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante und skizzieren Sie $N(t)$.

Aufgabe 3.* *(10*+10*=20* Punkte)*

a) Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$. Wir betrachten zu $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$(*) \quad y' = \alpha\,(ax + by + c)\,, \quad y(x_0) = y_0.$$

Begründen Sie, dass eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I um x_0 genau dann eine Lösung von $(*)$ ist, wenn die Funktion

$$u : I \to \mathbb{R},\ u(x) = ax + by(x) + c$$

das Anfangswertproblem

$$(**) \quad u' = a + b\alpha(u), \quad y(x_0) = u_0$$

mit $u_0 = ax_0 + by_0 + c$ löst. Welchen Vorteil bietet $(**)$ gegenüber $(*)$?

b) Finden Sie mit Hilfe von Teil (a) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = (x + y + 2)^2\,, \quad y(0) = -1.$$

* Diese Aufgabe ist eine Bonusaufgabe. Sie können damit Zusatzpunkte erzielen. Diese Punkte gehen jedoch nicht in die Berechnung der benötigten Gesamtpunktzahl ein.

Abgabe: Dienstag den 01.07.08 (vor der Vorlesung)