



Übung 12 zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. ($4 \times 5 = 20$ Punkte) Bestimmen Sie die allgemeinen (reellen) Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und geben Sie jeweils die den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ genügende Lösung an.

a) $y'' + y' - 2y = 0.$

b) $y'' - 6y' + 9y = 0.$

c) $y'' + 4y = 0.$

d) $y'' - 2y' + 5y = 0.$

Aufgabe 2. (10 Punkte) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(*) \quad x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0.$$

mit $x > 0$. Finden Sie eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(**) \quad a \cdot u'' + b \cdot u' + c \cdot u = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, derart dass y genau dann eine Lösung von $(*)$ ist, wenn die Funktion

$$u(t) = y(e^t)$$

eine Lösung von $(**)$ ist.

Berechnen Sie alle Lösungen von $(**)$ und damit dann alle Lösungen von $(*)$.

Aufgabe 3. (10 Punkte) Ein 80-Gallonen Tank ist halb mit destilliertem Wasser gefüllt. Eine Ethanol-Wasser-Mischung im Volumenverhältnis 1:1, wird dem Tank mit einer Rate von 4 Gallonen pro Minute zugeführt. Gleichzeitig wird dem gut umgerührten Gemisch die gleiche Menge entnommen. Bestimmen Sie die Mengen an Ethanol, welche sich nach 5 Minuten, 10 Minuten, 30 Minuten, 1 Stunde im Tank befinden. Formulieren Sie explizit die Modellannahmen, die Sie zur Lösung des Problems vorgenommen haben.

Abgabe: Dienstag den 15.07.08 (vor der Vorlesung)