Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Lösung zu Übung 12
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeinen (reellen) Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und geben Sie jeweils die den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ genügende Lösung an.

a) $y'' + y' - 2y = 0$.

b) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

c) $y'' + 4y = 0$.

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Verfahren. Zu der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(*) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

betrachte man das Polynom

$$p(X) = aX^2 + bX + c$$

und bestimme die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von p. Es treten die folgenden Fälle auf:

1. Es sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann erhält man alle reellen Lösungen von $(*)$ durch

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

2. Es sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Dann erhält man alle reellen Lösungen von $(*)$ durch

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3. Es sind $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$. In diesem Fall ist λ_2 das Komplexkonjugierte von λ_1. Man kann dann

$$\lambda_1 = u + iv \quad \text{und} \quad \lambda_2 = u - iv \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

schreiben und erhält alle reellen Lösungen durch

$$y(x) = c_1 \cdot e^{ux} \cdot \cos(vx) + c_2 \cdot e^{ux} \cdot \sin(vx) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Lösung.

a) Hier ist
$$p(X) = X^2 + X - 2 = (X+2)\cdot(X-1).$$
Wir haben also Fall 1 mit $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Alle Lösungen der DGL sind daher
$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$
Für $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ ist
$$c_1 + c_2 = 1 \quad \text{und} \quad -2c_1 + c_2 = 0.$$
Man berechnet damit $c_1 = \frac{1}{3}$ und $c_2 = \frac{2}{3}$. Die gesuchte Lösung ist also
$$y(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{-2x} + \frac{2}{3}\cdot e^x.$$

b) Hier ist
$$p(X) = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2.$$
Wir haben also Fall 2 mit $\lambda = 3$. Alle Lösungen der DGL sind daher
$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$
Für $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ ist
$$c_1 = 1 \quad \text{und} \quad 3c_1 + c_2 = 0.$$
Man berechnet damit $c_1 = 1$ und $c_2 = -\frac{1}{3}$. Die gesuchte Lösung ist also
$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{3}\cdot x\right)\cdot e^{3x}.$$

c) Hier ist
$$p(X) = X^2 + 4 = (X-2i)\cdot(X+2i).$$
Wir haben also Fall 3 mit $u = 0$ und $v = 2$. Alle Lösungen der DGL sind daher
$$y(x) = c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$
Für $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ ist
$$c_1 = 1 \quad \text{und} \quad 2c_2 = 0.$$
Man berechnet damit $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$. Die gesuchte Lösung ist also
$$y(x) = \cos(2x).$$

d) Hier ist
$$p(X) = X^2 - 2X + 5 = (X - (1+2i))\cdot(X - (1-2i)).$$
Wir haben also Fall 3 mit $u = 1$ und $v = 2$. Alle Lösungen der DGL sind daher
$$y(x) = c_1 \cdot e^x \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(2x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$
Für $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ ist
$$c_1 = 1 \quad \text{und} \quad c_1 + 2c_2 = 0.$$
Man berechnet damit $c_1 = 1$ und $c_2 = -\frac{1}{2}$. Die gesuchte Lösung ist also
$$y(x) = \left(\cos(2x) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)\right)\cdot e^x.$$

Aufgabe 2. *(10 Punkte)* Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(*) \quad x^2y'' - 3xy' + 5y = 0.$$

mit $x > 0$. Finden Sie eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(**) \quad a \cdot u'' + b \cdot u' + c \cdot u = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$, derart dass y genau dann eine Lösung von $(*)$ ist, wenn die Funktion

$$u(t) = y(e^t)$$

eine Lösung von $(**)$ ist.
Berechnen Sie alle Lösungen von $(**)$ und damit dann alle Lösungen von $(*)$.

Lösung. Wir nehmen an, dass $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$ ist und setzen

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(t) = y(e^t).$$

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$u'(t) = e^t \cdot y'(e^t) \quad \text{und} \quad u''(t) = e^t \cdot y'(e^t) + e^{2t} \cdot y''(e^t).$$

Setzt man $x = e^t$, so erhält man

$$\begin{aligned} a \cdot u''(t) + b \cdot u'(t) + c \cdot u(t) &= ae^{2t}y''(e^t) + (a+b)e^t y'(e^t) + cy(e^t) \\ &= ax^2y''(x) + (a+b)y'(x) + cy(x). \end{aligned}$$

Damit dies gleich 0 wird, müssen a, b, c so gewählt werden, dass $a = 1,\ a + b = -3$ und $c = 5$ ist. Dies gelingt mit

$$a = 1,\ b = -4 \text{ und } c = 5.$$

Damit ergibt sich

$$(**) \quad u'' - 4u' + 5u = 0.$$

Wie in Aufgabe 1 bestimmen wir alle Lösungen von $(**)$. Das zugehörige Polynom ist

$$X^2 - 4X + 5 = (X - (2+i)) \cdot (X - (2-i)).$$

Wir haben also Fall 3 mit $u = 2$ und $v = 1$. Alle Lösungen von $(**)$ sind daher

$$u(t) = c_1 \cdot e^{2t} \cdot \cos(t) + c_2 \cdot e^{2t} \cdot \sin(t) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Die allgemeine Lösung von $(*)$ ergibt sich damit als

$$\begin{aligned} y(x) = u(\ln x) &= c_1 \cdot e^{2 \cdot \ln x} \cdot \cos(\ln x) + c_2 \cdot e^{2 \cdot \ln x} \cdot \sin(\ln x) \\ &= x^2 \cdot (c_1 \cdot \cos(\ln x) + c_2 \cdot \sin(\ln x)) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Ein 80-Gallonen Tank ist halb mit destilliertem Wasser gefüllt. Eine Ethanol-Wasser-Mischung im Volumenverhältnis 1:1, wird dem Tank mit einer Rate von 4 Gallonen pro Minute zugeführt. Gleichzeitig wird dem gut umgerührten Gemisch die gleiche Menge entnommen. Bestimmen Sie die Mengen an Ethanol, welche sich nach 5 Minuten, 10 Minuten, 30 Minuten, 1 Stunde im Tank befinden. Formulieren Sie explizit die Modellannahmen, die Sie zur Lösung des Problems vorgenommen haben.

Lösung. Es werden die folgenden Modellannahmen gemacht:
1. Das Ethanol mischt sich sofort (das heißt ohne Zeitverlust) in das Wasser.
2. Chemische Reaktionen, die das Mischverhältnis beeinflussen, werden vernachlässigt.

Es beschreibe $y(t)$ die Menge des in der Mischung vorhandenen Ethanols zur Zeit t.
Die Menge des hinzukommenden Ethanols pro Zeit beträgt stets $2\ \frac{\text{Gal}}{\text{min}}$.
Die Menge des abfließenden Ethanols pro Zeit beträgt zur Zeit t gerade

$$4\ \frac{\text{Gal}}{\text{min}} \cdot \frac{y(t)}{40\ \text{Gal}} = \frac{1}{10}\ \text{min}^{-1} \cdot y(t),$$

denn $\frac{y(t)}{40\ \text{Gal}}$ ist gerade der Anteil an Ethanol in der Mischung.
Insgesamt erhalten wir für die Änderung $y'(t)$ der Ethanolmenge nach der Zeit, dass

$$(*) \quad y'(t) = 2\ \frac{\text{Gal}}{\text{min}} - \frac{1}{10}\ \text{min}^{-1} \cdot y(t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

$$(*)_h \quad y'(t) = -\frac{1}{10}\ \text{min}^{-1} \cdot y(t)$$

ist

$$y_c(t) = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{10}\ \text{min}^{-1} \cdot t\right)$$

mit einer Konstanten c.
Eine spezielle Lösung von $(*)$ ist offensichtlich die konstante Funktion $y_s(t) = 20$ Gal. Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist folglich

$$y(t) = y_s(t) + y_c(t) = 20\ \text{Gal} + c \cdot \exp\left(-\frac{1}{10}\ \text{min}^{-1} \cdot t\right).$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0\ \text{min}) = 0$ Gal erhält man $c = -20$ Gal. Damit ist

$$y(t) = 20\ \text{Gal} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{10}\ \text{min}^{-1} \cdot t\right)\right).$$

Die gesuchten Werte kann man nun berechnen. Es gilt näherungsweise:

t	5 min	10 min	30 min	60 min
y(t)	7.87 Gal	12.64 Gal	19.00 Gal	19.95 Gal