Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 4
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(15 Punkte)* Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen und die Jacobimatrix in allen Punkten ihres Definitionsbereiches.

a) $\underline{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \underline{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2\cdot\sin(z)-\cos(y)\\3\cdot\exp(x)\cdot(y-z)\end{pmatrix}$

b) $\underline{g}:]0,\infty[^2\to\mathbb{R}^2,\ \underline{g}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln(x+y)\\\ln(xy)\end{pmatrix}$

c) $\underline{h}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\ \underline{x}\mapsto A\cdot\underline{x}$ für eine gegebene Matrix $A=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Aufgabe 2. *(15 Punkte)* Wir betrachten die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{x\cdot y^2}{x^2+y^4} & ,\ \text{falls } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ \text{sonst.}\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f in allen Punkten aus $\mathbb{R}^2$.
Ist f stetig? Sind die partiellen Ableitungen von f stetig? Ist f total differenzierbar?

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Wir betrachten die Funktion

$$\underline{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \underline{f}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x^2+1)\cdot\exp(y)\\\cos(x+y)-3y\end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen Vektor $\underline{v}\in\mathbb{R}^2$, so dass sich $\underline{f}$ in der Form

$$\underline{f}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underline{v}+A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\underline{g}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ schreiben lässt, wobei $\underline{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ eine Funktion ist, für die $\underline{g}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 'vernachlässigbar' ist, wenn $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ nahe $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist.
Präzisieren Sie dies anhand der Definition der totalen Differenzierbarkeit.

Aufgabe 4.* *(20* Punkte)* Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\underline{x}^{(0)} \in D$.
Für einen Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ nennt man den Grenzwert

$$D_{\underline{v}} f\left(\underline{x}^{(0)}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\underline{x}^{(0)} + h \cdot \underline{v}\right) - f\left(\underline{x}^{(0)}\right)}{h}$$

die Richtungsableitung von f entlang $\underline{v}$ im Punkt $\underline{x}^{(0)}$, falls er existiert.

a) Seien nun die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y) \cdot (1 + \exp(z))$$

und ein Richtungsvektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $\underline{v} \neq \underline{0}$ gegeben.
Zeigen Sie die Existenz und berechnen Sie den Wert der Richtungsableitung $D_{\underline{v}} f\left(\underline{0}\right)$ von f entlang $\underline{v}$ im Nullpunkt. Berechnen Sie außerdem den Gradienten $\nabla f(\underline{0})$ von f im Nullpunkt und das Skalarprodukt $\langle\, \nabla f(\underline{0})\, ,\ \underline{v}\, \rangle$. Was fällt auf?

b) Sei nun f wie in Aufgabe 2.
Überprüfen Sie auch hier die Existenz der Richtungsableitungen $D_{\underline{v}} f\left(\underline{0}\right)$ von f entlang $\underline{v}$ im Nullpunkt für einen gegebenen Vektor $\underline{0} \neq \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
Wie steht es in diesem Fall mit der Gültigkeit der Gleichung

$$D_{\underline{v}} f\left(\underline{0}\right) = \langle\, \nabla f(\underline{0})\, ,\ \underline{v}\, \rangle\ ?$$

c) Stellen Sie eine Vermutung auf, unter welchen Voraussetzungen die Gleichheit

$$D_{\underline{v}} f\left(\underline{x}^{(0)}\right) = \langle\, \nabla f(\underline{x}^{(0)})\, ,\ \underline{v}\, \rangle$$

gilt.

* Diese Aufgabe ist eine Bonusaufgabe. Sie können damit Zusatzpunkte erzielen. Diese Punkte gehen jedoch nicht in die Berechnung der benötigten Gesamtpunktzahl ein.

Abgabe: Dienstag den 20.05.08 (vor der Vorlesung)