Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 5
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(5+5=10 Punkte)*

a) Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{Z}(r,\varphi,z) &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\mathcal{Z}$ und ihre Determinante in einem beliebigen Punkt (r,φ,z) des Definitionsbereiches von $\mathcal{Z}$.

Anmerkung: Man kann zusätzlich zeigen, dass die Funktion $\mathcal{Z}$ injektiv ist und dass ihr Bild 'fast' der ganze $\mathbb{R}^3$ ist. Man kann also jeden Punkt (x,y,z) aus diesem Bild eineindeutig mittels $\mathcal{Z}$ durch einen Punkt (r,φ,z) aus dem Definitonsbereich von $\mathcal{Z}$ beschreiben. Man nennt dann (r,φ,z) die *Zylinderkoordinaten* von (x,y,z).

b) Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{K}(r,\varphi,\theta) &= (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\mathcal{K}$ und ihre Determinante in einem beliebigen Punkt (r,φ,θ) des Definitionsbereiches von $\mathcal{K}$.

Anmerkung: Man kann zusätzlich zeigen, dass die Funktion $\mathcal{K}$ injektiv ist und dass ihr Bild 'fast' der ganze $\mathbb{R}^3$ ist. Man kann also jeden Punkt (x,y,z) aus diesem Bild eineindeutig mittels $\mathcal{K}$ durch einen Punkt (r,φ,θ) aus dem Definitonsbereich von $\mathcal{K}$ beschreiben. Man nennt dann (r,φ,θ) die *Kugelkoordinaten* von (x,y,z).

Aufgabe 2. *(5+5=10 Punkte)* Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz der folgenden Vektorfelder:

a) $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{f}(x,y,z) = (x-y^2, y-z^2, z-x^2)$.

b) $\underline{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{g}(x,y,z) = \big(axy - z^3,\ (a-2)x^2,\ (1-a)xz^2\big)$.
Dabei sei $a \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. Kann man a so bestimmen, dass rot $\underline{g} = \underline{0}$ ist?

Aufgabe 3. *(5+5+5*+5+5+5*+5* = 20 + 15* Punkte)* Seien $c \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge, $u, v : D \to \mathbb{R}$ ein skalare Felder und $\underline{f}, \underline{g} : D \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder. Es sei außerdem vorausgesetzt, dass diese Funktionen zweimal stetig partiell differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Rechenregeln auf D gelten:

a) div $\big(\underline{f} + \underline{g}\big) = \text{div } \underline{f} + \text{div } \underline{g}$,
div $\big(c \cdot \underline{f}\big) = c \cdot \text{div } \underline{f}$.
rot $\big(\underline{f} + \underline{g}\big) = \text{rot } \underline{f} + \text{rot } \underline{g}$,
rot $\big(c \cdot \underline{f}\big) = c \cdot \text{rot } \underline{f}$.

b) grad $(u \cdot v) = u \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{grad } u$.

c)* div $\big(u \cdot \underline{f}\big) = \langle \text{grad } u, \underline{f} \rangle + u \cdot \text{div } \underline{f}$.

d) rot $(\text{grad } u) = \underline{0}$.

e) div $\big(\text{rot } \underline{f}\big) = 0$.

f)* rot $\big(u \cdot \underline{f}\big) = u \cdot \text{rot } \underline{f} + (\text{grad } u) \times \underline{f}$.

g)* rot $\big(\text{rot } \underline{f}\big) = \text{grad } \big(\text{div } \underline{f}\big) - \Delta \underline{f}$. Dabei sei $\Delta \underline{f} = \frac{\partial^2 \underline{f}}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 \underline{f}}{(\partial y)^2} + \frac{\partial^2 \underline{f}}{(\partial z)^2}$.

* Diese Aufgabe ist eine Bonusaufgabe. Sie können damit Zusatzpunkte erzielen. Diese Punkte gehen jedoch nicht in die Berechnung der benötigten Gesamtpunktzahl ein.

Abgabe: Dienstag den 27.05.08 (vor der Vorlesung)