Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 8
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(10+10* Punkte)*

a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \left(4x^2 + y^2\right) \cdot \exp\left(-x^2 - 4y^2\right)$$

auf lokale Extrema.

b) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x,y,z) = (x-1)^4 + (y^2+1) \cdot (z^2+1).$$

Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von g in einem beliebigen Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den kritischen Punkt $p = (x_0, y_0, z_0)$. Was können Sie nur anhand der Hessematrix in p über das Vorliegen einer lokalen Extremstelle aussagen? Kann man sich dennoch überlegen, ob p eine lokale Extremstelle ist oder nicht?

Aufgabe 2. *(5+5=10 Punkte)*

a) Eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Gleichung

$$E : 2x - 2y + z - 9 = 0.$$

Lösen Sie diese Gleichung nach z auf und berechnen Sie für einen beliebigen Punkt $(x,y,z(x,y)) \in E$ den Abstand $d(x,y)$ zum Punkt $P = (12,1,5)$ (nur in Abhängigkeit von x und y). Finden Sie dann mithilfe der mehrdimensionalen Differentialrechnung den Punkt der Ebene E, für den der Abstand zum Punkt P minimal wird und geben Sie diesen Abstand an.

b) Berechnen Sie wie in (a) zum Punkt $P' = (2,-4,1)$ den Lotfußpunkt und den Abstand zur Ebene

$$E' : 3x - 2y + 6z - 27 = 0.$$

Aufgabe 3. *(5+5+5=15 Punkte)* Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

a) $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$.

b) $\gamma_2 : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

c) $\gamma_3 : [0,6\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{2\pi} \cdot \cos t \\ \frac{t}{2\pi} \cdot \sin t \end{pmatrix}$.

Hinweis zu c): Um das auftretende Integral zu lösen, sollten Sie die entsprechende Stammfunktion (z.B. bei Wikipedia) nachschlagen

* Diese Aufgabe ist eine Bonusaufgabe. Sie können damit Zusatzpunkte erzielen. Diese Punkte gehen jedoch nicht in die Berechnung der benötigten Gesamtpunktzahl ein.

Abgabe: Dienstag den 17.06.08 (vor der Vorlesung)