Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 9
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(5+5+10+10=30 Punkte)* Berechnen Sie das Kurvenintegrale $\int_{\underline{u}} \underline{f}\,(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$ für:

a) $\underline{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$,
$\underline{u} : [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

b) $\underline{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 \cdot x_2^2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$,
$\underline{u} : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1-t \\ 2t \end{pmatrix}$.

c) $\underline{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_3}{x_2} \\ \ln(x_1 \cdot x_2) \end{pmatrix}$,
$\underline{u} : [-1,1] \to \mathbb{R}^3,\ \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} \exp(t^2) \\ 1 \\ \sin(\pi \cdot t) \end{pmatrix}$.

d) $\underline{f}(\underline{x}) = \ln\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \cdot \underline{x}$,
$\underline{u} : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2*. *(20* Punkte)* Sei vorausgesetzt, dass $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen konvexen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ ist. (Dabei heißt D konvex, falls zu je zwei Punkten aus D auch die Verbindungsstrecke zwischen ihnen ganz in D liegt.) Dann nennt man $\underline{f}$ ein Gradientenfeld, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ gibt mit grad $F = \underline{f}$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

i) $\underline{f}$ ist ein Gradientenfeld.

ii) Es ist $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ für alle $i, j = 1, \ldots, 3$.

iii) Es ist rot $\underline{f} = \underline{0}$.

Ist $\underline{f}$ ein Gradientenfeld und $F : D \to \mathbb{R}$ gegeben mit grad $F = \underline{f}$, so gilt für jeden (stetig differenzierbaren) Weg $\underline{u} : [a,b] \to D$

$$\int_{\underline{u}} \underline{f}\,(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = F\left(\underline{u}(b)\right) - F\left(\underline{u}(a)\right).$$

In diesem Fall hängt das Kurvenintegral also nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab und ist 0, falls $\underline{u}$ ein geschlossener Weg ist. Man nennt F dann auch Potential zu $\underline{f}$.

a) Beweisen Sie die Implikationen i) $\Rightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii). Der Beweis der Umkehrung ii) $\Rightarrow$ i) ist (zu) schwierig.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl und

$$\underline{f} : (0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \underline{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \frac{x_3}{x_1} \\ \frac{x_3}{x_2} \\ \ln(x_1 \cdot x_2) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie rot $\underline{f}$ und bestimmen Sie α so, dass $\underline{f}$ ein Gradientenfeld ist.

c) Bestimmen Sie für $\alpha = 1$ ein Potential F von $\underline{f}$ und berechnen Sie damit das Kurvenintegral $\int_{\underline{u}} \underline{f}\,(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$ längs des Weges

$$\underline{u} : [-1,1] \to \mathbb{R}^3,\ \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} \exp(t^2) \\ 1 \\ \sin(\pi \cdot t) \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie dies mit dem Ergebnis von Aufgabe 1 c).

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Seien $h, r > 0$ positive reelle Zahlen. Wir betrachten die Teilmenge

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le h \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\right) \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie K und die Bedeutung der Größen h und r. Skizzieren Sie K und berechnen Sie das Volumen von K als geeignetes Bereichsintegral.
Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

Abgabe: Dienstag den 24.06.08 (vor der Vorlesung)