Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Testat 3 vom 03.06.2008 zur MfN II

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Unter den folgenden Aussagen sind einige richtig und einige falsch. Kreuzen Sie die richtigen an!

Aussage 1. Es sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$ sei stetig partiell differenzierbar.

a) Die Jacobi-Matrix $J_{\underline{f}}\left(\underline{x}^{(0)}\right)$ an der Stelle $\underline{x}^{(0)} \in D$ ist definiert durch

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\left(\underline{x}^{(0)}\right)\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

b) Ist $m = n$, so ist $J_{\underline{f}}\left(\underline{x}^{(0)}\right)$ stets symmetrisch.

c) Ist $m = 1$, so zeigt der Vektor $\left(J_{\underline{f}}\left(\underline{x}^{(0)}\right)\right)^t$ stets in Richtung der größten Änderung von $\underline{f}$ im Punkt $\underline{x}^{(0)}$.

1a)	1b)	1c)
		X

Aussage 2. Es sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\underline{g} : D \to \mathbb{R}^3$ und $\underline{h} : D \to \mathbb{R}^3$ seien zweimal stetig partiell differenzierbar. Es gelten

a) div $(\text{grad } f) = 0$.

b) rot $(\text{grad } f) = \underline{0}$.

c) $(\text{rot } \underline{g}) \times (\text{rot } \underline{h}) = \text{rot } (\underline{g} \times \underline{h})$.

2a)	2b)	2c)
	X	

Aussage 3. Es seien D und D' offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, $\underline{f} : D \to D'$ und $\underline{g} : D' \to D$ seien stetig partiell differenzierbar.

a) Ist $\underline{g}$ invers zu $\underline{f}$, so ist $J_{\underline{f}}\left(\underline{x}^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für jedes $\underline{x}^{(0)} \in D$ invertierbar.

b) Ist $J_{\underline{f}}\left(\underline{x}^{(0)}\right)$ für jedes $\underline{x}^{(0)} \in D$ invertierbar, so ist $\underline{f}$ invertierbar.

c) Ist für ein $\underline{x}^{(0)} \in D$ die Matrix $J_{\underline{f}}\left(\underline{x}^{(0)}\right)$ invertierbar, so ist $\underline{f}$ in einer Umgebung von $\underline{x}^{(0)}$ invertierbar.

3a)	3b)	3c)
X		X

Aussage 4. Es sei D offen in $\mathbb{R}^n$ und $F : D \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar.

a) Die Gleichung $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ kann immer nach x_n aufgelöst werden, d.h. es existiert eine Funktion g auf einem geeigneten Definitionsbereich, so dass $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ äquivalent ist zu $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

b) Die Aussage aus a) gilt lokal, d.h. zu gegebenem $\underline{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ aus D gibt es eine solche Funktion g, die in einer Umgebung von $\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}\right)$ definiert ist.

c) Die Aussage aus a) gilt lokal in einer Umgebung von $\underline{x}^{(0)}$, wenn $\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\underline{x}^{(0)}\right) \neq 0$ ist.

4a)	4b)	4c)
		X