Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Anne Wald, M.Sc.

Probeklausur zur Mathematik für Naturwissenschaftler I und II im SS 2012

Aufgabe 1 *(3+2+2+3=10 Punkte)*

a) Sei $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1\}$. Skizzieren Sie S.

b) Sei $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$. Wieviele Teilmengen mit vier Elementen besitzt die Menge $\{1, 2, ..., n\}$?

c) Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Wieviele injektive Abbildungen von $\{1, 2, ..., k\}$ nach $\{1, 2, ..., n\}$ gibt es?

d) Welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv, bijektiv besitzt die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x - 1$?

Aufgabe 2 *(2+4+4=10 Punkte)*

Geben Sie für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich D als Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, skizzieren Sie ihre Graphen und geben Sie jeweils mindestens drei signifikante Eigenschaften an (Monotonie, Nullstellen, Extremwerte, Wendestellen, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, ...):

a) $f : D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$;

b) $g : D_g \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$;

c) $h : D_h \to \mathbb{R}, x \mapsto \arccos(x)$.

Aufgabe 3 *(2+4+4=10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ und das Argument $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ der folgenden komplexen Zahlen und schreiben Sie diese Zahlen in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:
   i) $z_1 = e^{\pi i}$;
   ii) $z_2 = (1+i)^3$.

b) Lösen Sie die quadratische Gleichung (d.h. geben Sie die Lösungen in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an):

$$z^2 - 2z + 1 - \frac{1}{2}i = 0.$$

Aufgabe 4 *(2+2+3+3=10 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte
   i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{(n^2)}}$;
   ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)(n-5)}{n^2}$.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe
   i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n^2)}$;
   ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-2x)^n$?

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*
Aus einem zylindrischen Holzstamm mit Radius R soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt herausgesägt werden, dessen Tragfähigkeit maximal ist. Wie müssen die Seitenlänge a und die Höhe b des Balkens gewählt werden, wenn die Tragfähigkeit zu ab^2 proportional ist?

Aufgabe 6 *(2+2+2+4=10 Punkte)*

a) Finden Sie Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen.
   i) $f : (2, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2x-3}$;
   ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
   iii) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}, x \mapsto \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

b) Berechnen Sie
$$\int_0^\infty xe^{-x} dx.$$

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*
Besitzt das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
eine Lösung?

Aufgabe 8 *(10 Punkte)*
Berechnen Sie die Determinante sowie die Matrixinverse der 3×3-Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 *(10 Punkte)*
Untersuchen Sie die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto x^2y^2 + (x + y)^2 - 6(x + y)$$
auf lokale und globale Extrema.

Aufgabe 10 *(10 Punkte)*
Berechnen Sie das Bereichsintegral
$$\int_B f(x, y) dxdy$$
für $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ und
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 + x^2\right\}.$$