Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Anne Wald, M.Sc.

Übung 10 zur Mathematik für Naturwissenschaftler II im SS 2012

Aufgabe 1 *(10 Punkte)* Es sei

$$\underline{N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \right\}$$

und

$$E := \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle \underline{x} - \underline{N}, \underline{N} \rangle = 0 \right\}.$$

a) Was ist die geometrische Bedeutung von K und E?

b) Bestimmen Sie $K \cap E$.
Hinweis: Beschreiben Sie $K \cap E$ durch eine Kreisgleichung, abhängig beispielsweise von x und y, mit entsprechender Nebenbedingung für z. Diese Schreibweise ist hilfreich in Teil c).

c) Finden Sie eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit Spur $K \cap E$.
Hinweis: Eine Kreisgleichung $a^2 + b^2 = c^2$ lässt sich parametrisieren durch $a = \sqrt{c} \cdot \sin(2\pi t)$ und $b = \sqrt{c} \cdot \cos(2\pi t)$. Verwenden Sie nun Teil b), um x und y zu parametrisieren und nutzen Sie die Nebenbedingung zur Parametrisierung von z.

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die Länge des Kurvenstücks des Graphen von $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ zwischen $x = 0$ und $x = b$ zu einer positiven reellen Zahl b.

Aufgabe 3 *(1+4 Punkte)*
Es sei $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(2\pi t) \\ t \cdot \sin(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

a) Zeichnen Sie die Spur von γ.

b) Bestimmen Sie die Länge des Kurvenstücks von γ zwischen $t = 0$ und $t = t_0$.

Abgabe am 28.06.2012
in die Briefkästen in E2 5