Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Anne Wald, M.Sc.

Übung 11 zur Mathematik für Naturwissenschaftler II im SS 2012

Aufgabe 1 *(1+3+3=7 Punkte)*
Es sei

$$\underline{p} : (0,1) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1 - \sqrt{1-r^2} \end{pmatrix}.$$

a) Beschreiben Sie die Bildmenge von $\underline{p}$.

b) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ zu

$$\underline{P}^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. finden Sie $\underline{x}^{(0)}$ aus $(0,1) \times (0,2\pi)$ mit $\underline{p}(\underline{x}^{(0)}) = \underline{P}^{(0)}$.

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $\underline{p}$ in $\underline{x}^{(0)}$ in der Richtung

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d.h. die Richtungsableitungen der drei Komponentenfunktionen von $\underline{p}$.

Aufgabe 2 *(3+3=6 Punkte)*
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ sowie $\underline{f}, \underline{g} : U \to \mathbb{R}^m$ in $C^1(U)$.

a) Begründen Sie die Produktregel

$$D(f \cdot g) = g \cdot D(f) + f \cdot D(g)$$

für die vollständigen Ableitungen $D(f)$, $D(g)$ und $D(f \cdot g)$.

b) Finden Sie eine analoge Produktregel für die skalarwertige Funktion

$$h = \langle \underline{f}, \underline{g} \rangle.$$

Aufgabe 3 *(1+1+2+3=7 Punkte)*

Eine (punktförmige) Masse m werde am Ort $\underline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$ so geworfen, dass die Masse zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit $\underline{v}^{(0)} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$ besitzt. Durch die Gravitation wird die Masse konstant in negativer z-Richtung beschleunigt. Die Beschleunigung sei $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$.

a) In welcher Ebene bewegt sich die Masse?
b) Finden Sie eine Parametrisierung des Ortes $\underline{x}$ nach der Zeit t.
c) Bestimmen Sie die z-Komponente in Abhängigkeit von der x-Komponente. Welche Form besitzt die Kurve, auf der sich die Masse bewegt?
d) Wann trifft die Masse auf dem Boden auf? Wie lang ist der Weg im $\mathbb{R}^3$, den die Masse bis zu ihrem Auftreffen auf dem Boden zurückgelegt hat?

Abgabe am 05.07.2012
in die Briefkästen in E2 5