Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Anne Wald, M.Sc.

Übung 12 zur Mathematik für Naturwissenschaftler II im SS 2012

Aufgabe 1 *(2+4+3=9 Punkte)*
Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto e^{x^2+xy-y^2}.$$

a) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Ordnung 2 um $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$.

b) Werten Sie diese an den Stellen

$$\underline{x}^{(1)} = (1, 1),\ \underline{x}^{(2)} = (1/2, 1/2)\,,\ \underline{x}^{(3)} = (1/5, 1/5)\ \text{ und } \underline{x}^{(4)} = (1/10, 1/10)$$

aus und berechnen Sie für $\underline{x}^{(1)}$ bis $\underline{x}^{(4)}$ die Werte von

$$\frac{R_2\left(\underline{0}, \underline{x}^{(i)}\right)}{\|\underline{x}^{(i)}\|^2}$$

mit $i \in \{1, ..., 4\}$.

c) Berechnen Sie nun die Werte der Taylor-Entwicklung an den Stellen

$$\underline{x}^{(5)} = (1, 1/2)\ \text{ und } \underline{x}^{(6)} = (1, 0)$$

und vergleichen Sie die genäherten Werte mit den exakten Ergebnissen.

Aufgabe 2 *(2+3=5 Punkte)*
Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.
Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$ das Nullfeld ist, und zwar

a) direkt;

b) indem Sie nachweisen, dass für jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt:

$$\int_a^b \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = 0.$$

Aufgabe 3 *(4+2=6 Punkte)*
Es sei $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$F_1(x, y, z) = yz^3, \quad F_2(x, y, z) = xz^3 \quad \text{und} \quad F_3 = 3xyz^2.$$

a) Berechnen Sie div$\underline{F}$, rot$\underline{F}$ und grad div$\underline{F}$, sowie gegebenenfalls ein Potential $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (d.h. f erfüllt grad$f = \underline{F}$).
b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \langle \underline{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

für die Kurven

i) $\gamma(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 1].$

ii) $\gamma(t) = t^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 1].$

Abgabe am 12.07.2012
in die Briefkästen in E2 5