



Übung 2 zur Mathematik für Naturwissenschaftler II im SS 2012

Aufgabe 1 (4+6=10 Punkte)

Für eine integrierbare Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ und eine natürliche Zahl N seien

$$h := \frac{b-a}{2N}, \quad x_i = a + ih \quad (0 \leq i \leq 2N)$$

und

$$S(f, a, b, N) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})]$$

(die Koeffizienten sind 1, 4, 2, 4, 2, ..., 2, 4, 1).

Im Allgemeinen liefert die *Simpson-Regel* $S(f, a, b, N)$ eine bessere Approximation für

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

als die Trapez-Regel $T(f, a, b, 2N)$.

- Begründen Sie, dass die Simpson-Regel Polynome des Grades ≤ 3 exakt integriert.
- Berechnen Sie $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ jeweils mit fünf Nachkommastellen
 - exakt,
 - näherungsweise mit der Trapez-Regel ($N = 4$) und
 - mit der Simpson-Regel ($N = 2$)und vergleichen Sie die Fehler von ii) bzw. iii) gegenüber i).

Aufgabe 2 (2+2+6=10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

- Berechnen Sie alle Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte von f und skizzieren Sie den Graphen von f .
- Finden Sie eine konvergente Majorante von f (d.h. zeigen Sie, dass $I(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergiert).
- Berechnen Sie eine Näherung von $I(f)$ mithilfe der Simpson-Regel, indem Sie $\int_0^{\infty} f(x) dx$ näherungsweise durch $\int_0^b f(x) dx$ mit einer geeigneten Zahl $b > 0$, z.B. $b = 6$, bestimmen. Welchen Fehler machen Sie dabei?

**Abgabe am 03.05.2012 vor der Vorlesung
in die Briefkästen in E2 5**