



## Übung 2 zur Mathematik für Naturwissenschaftler II im SS 2012

### Aufgabe 1 (4+6=10 Punkte)

Für eine integrierbare Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  und eine natürliche Zahl  $N$  seien

$$h := \frac{b-a}{2N}, \quad x_i = a + ih \quad (0 \leq i \leq 2N)$$

und

$$S(f, a, b, N) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})]$$

(die Koeffizienten sind 1, 4, 2, 4, 2, ..., 2, 4, 1).

Im Allgemeinen liefert die *Simpson-Regel*  $S(f, a, b, N)$  eine bessere Approximation für

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

als die Trapez-Regel  $T(f, a, b, 2N)$ .

- Begründen Sie, dass die Simpson-Regel Polynome des Grades  $\leq 3$  exakt integriert.
- Berechnen Sie  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  jeweils mit fünf Nachkommastellen
  - exakt,
  - näherungsweise mit der Trapez-Regel ( $N = 4$ ) und
  - mit der Simpson-Regel ( $N = 2$ )und vergleichen Sie die Fehler von ii) bzw. iii) gegenüber i).

### Aufgabe 2 (2+2+6=10 Punkte)

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ .

- Berechnen Sie alle Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte von  $f$  und skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .
- Finden Sie eine konvergente Majorante von  $f$  (d.h. zeigen Sie, dass  $I(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  konvergiert).
- Berechnen Sie eine Näherung von  $I(f)$  mithilfe der Simpson-Regel, indem Sie  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  näherungsweise durch  $\int_0^b f(x) dx$  mit einer geeigneten Zahl  $b > 0$ , z.B.  $b = 6$ , bestimmen. Welchen Fehler machen Sie dabei?

**Abgabe am 03.05.2012 vor der Vorlesung  
in die Briefkästen in E2 5**