Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Anne Wald, M.Sc.

Übung 4 zur Mathematik für Naturwissenschaftler II im SS 2012

Aufgabe 1 *(5 Punkte)*
Es seien $\langle\ ,\ \rangle$ bzw. $\|\ \|$ das euklidische Skalarprodukt bzw. die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Rechnen Sie nach, dass für Vektoren $\underline{x} \neq \underline{0} \neq \underline{y}$ in $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\|\ \|\underline{y}\| \cos(\measuredangle(\underline{x}, \underline{y})),$$

und begründen Sie, wieso eine ähnliche Rechnung dasselbe Ergebnis in $\mathbb{R}^3$ liefert. Legen Sie dabei die elementargeometrische Definition des Kosinus zugrunde.

Aufgabe 2 *(1+1+1+1+1=5 Punkte)*
Welche der folgenden Teilmengen eines Vektorraumes V sind $\mathbb{K}$-linear unabhängig?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 2-i \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^2,\ \mathbb{K} = \mathbb{C}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^2,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Aufgabe 3 *(2+3=5 Punkte)*

a) Entscheiden Sie mithilfe des Skalarproduktes, welche der folgenden Vektoren senkrecht aufeinander stehen:

$$\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Seien $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$.

i) Wie lang sind $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_2$?
ii) Wie groß ist der Winkel zwischen $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_2$?
iii) Finden Sie einen Vektor $\underline{u}_3$ aus $\mathbb{R}^3$, der senkrecht auf $\underline{u}_2$ steht.

Aufgabe 4 *(1+1+2+1=5 Punkte)* **Der Tetraederwinkel**
Ein Tetraeder T (ein räumlicher Körper mit vier Randpunkten $P_1, ..., P_4$, die alle gleichen Abstand voneinander haben) sei in $\mathbb{R}^3$ eingebettet mit

$$\underline{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{P}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Welche Koordinaten hat P_4? (Die dritte Koordinate von P_4 ist positiv.)
b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt Q von T.
c) Bestimmen Sie den Winkel $\varphi = \measuredangle(\underline{P}_i - Q, \underline{P}_j - Q)$ für zwei Indizes $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$.
(Es ergibt sich keine "runde" Zahl wie etwa $\frac{\pi}{2}$, 90°, 120°,... Beschreiben Sie φ näherungsweise durch seinen Kosinus und geben Sie dann eine Näherung für φ im Gradmaß an.)
d) Wo spielt der Tetraeder in der Chemie eine Rolle?

Abgabe am 18.05.2012 bis 10.00 Uhr
in die Briefkästen in E2 5