Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Anne Wald, M.Sc.

Übung 8 zur Mathematik für Naturwissenschaftler II im SS 2012

Aufgabe 1 *(4+5* Punkte)*

a) Entscheiden Sie, ob das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2z + w &= -3 \\ -x + 4y + 3z &= 0 \\ -x + y - 2z - 2w &= 6 \end{aligned}$$

lösbar ist und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

b*) Bringen Sie die folgende Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 *(4+5* Punkte)*

a) Bestimmen Sie die zu

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 12 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix.

b*) Invertieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 *(2+2=4 Punkte)*

a) Entscheiden Sie mithilfe der Determinante, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist.

b) Berechnen Sie die Determinante der 4×4-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*
Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die Hauptachsentransformation durch, finden Sie also eine Orthonormalbasis $\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}\right)$ von $\mathbb{R}^3$, sodass für $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{x} = \sum_{1\leq i\leq 3} a_i \underline{v}^{(i)}$ gilt:

$$Q_A(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = \sum_{1\leq i\leq 3} \lambda_i a_i^2.$$

Anleitung:

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A.

b) Finden Sie zu jedem λ_i einen Eigenvektor $\underline{v}^{(i)}$ mit $\|\underline{v}^{(i)}\| = 1$. Die $\underline{v}^{(i)}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ (wieso?).

c) Bezüglich dieser Basis $\left(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}\right)$ hat $Q_A(\underline{x})$ die angegebene Gestalt.

Abgabe am 14.06.2012
in die Briefkästen in E2 5

Die mit einem $*$ versehenen Aufgaben sind freiwillige Zusatzaufgaben.