Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Anne Wald, M.Sc.

Übung 9 zur Mathematik für Naturwissenschaftler II im SS 2012

Aufgabe 1 *(3+2 Punkte)*

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t+9 \end{pmatrix}$$

- keine Lösung,
- genau eine Lösung,
- mehr als eine Lösung?

b) Geben Sie die Lösungsmenge für $t = 2$ an.

Aufgabe 2 *(2+3+2+3=10 Punkte)*

a) Sei

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen.
Zeigen Sie, dass das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Sei

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ b \in \mathbb{R} \right\}$$

die Gruppe der strikten oberen Dreicksmatrizen und $A \in M_2$.

i) Berechnen Sie $\det(A^{-1})$.

ii) Berechnen Sie die Inverse einer solchen strikten oberen Dreiecksmatrix A allgemein.

c) Finden Sie zwei Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass

$$A_1 \cdot A_2 \neq A_2 \cdot A_1.$$

d) Zeigen Sie, dass alle Matrizen aus

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

miteinander kommutieren, d.h. für alle $B, C \in M$ gilt $B \cdot C = C \cdot B$.

Aufgabe 3 *(3+2=5 Punkte)*
Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Weiter sei die Blockmatrix

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben (0 sei die 2×2-Nullmatrix).

a) Zeigen Sie: $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$.

b) Berechnen Sie $\det(M)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & s^2 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ ist M invertierbar?

Abgabe am 21.06.2012
in die Briefkästen in E2 5