Mathematik für Naturwissenschaftler II
Probeklausur

Dieses Übungsblatt dient der Klausurvorbereitung und wird nicht korrigiert.

1. Finden Sie eine 4×4-Matrix A mit den folgenden Eigenschaften:
   - A hat Rang 3.
   - Streicht man eine beliebige Zeile von A, so hat die verbleibende 3×4-Matrix immer noch Rang 3.

2. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

   (a) Berechnen Sie das Inverse von A und lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jeden der Vektoren $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Berechnen Sie $\det(A^3)$ und $\det(A^4)$.

3. Sei die komplexe 3×3-Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ gegeben.

   Berechnen Sie die Eigenwerte von A, und geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.

4. Seien $x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, und sei U der Unterraum des $\mathbb{R}^4$, der von x_1, x_2 und x_3 erzeugt wird.
   Geben Sie eine orthonormale Basis von U an.

5. Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x, y) := x^2y + xy^2 + x^2 + xy - y^2 - y + 1$.

6. Gegeben seien die 4 Messwerte $y_i = 2, 3, 8, 20$ zu den Zeitpunkten $t_i = 1, 2, 3, 4$. Aus theoretischen Gründen weiß man, dass die Änderung von y sich bei Erhöhung von t um 1 verdoppelt, dass also $y = f(t) = a + b2^t$ gilt. Bestimmen Sie a und b so, dass die Summe der Fehlerquadrate
$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - f(t_i))^2$$
   minimal wird.

(bitte wenden)

7. Finden Sie eine Funktion y, die das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 + x^2 + (1 + x^2)y(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

löst.

8. Sei $\omega := x^2 y dx + 2xy^2 dy$. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der Weg $t \mapsto \gamma(t) := (t, t^2)$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \omega.$$