

Mathematik für Naturwissenschaftler II Übungsblatt 11

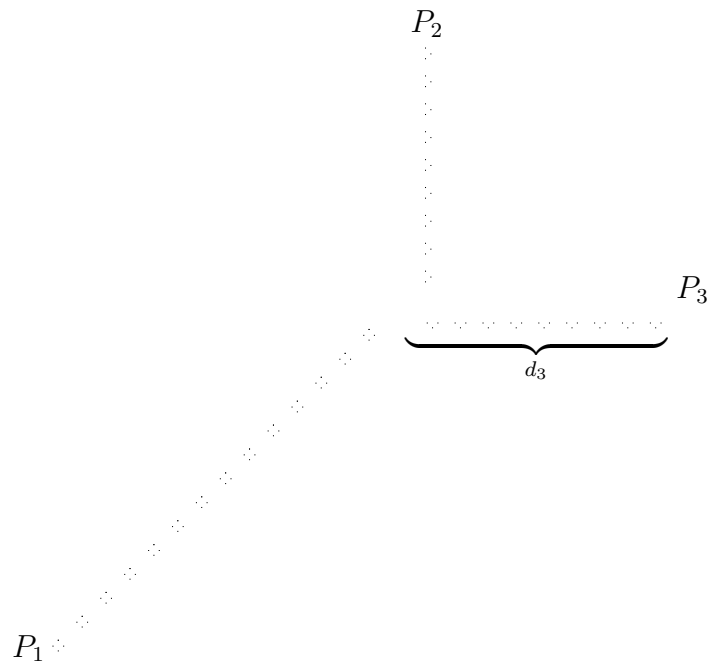
Abgabetermin Donnerstag, den 30.6.2005 vor der Vorlesung.

1. Betrachten Sie folgende Versuchsanordnung:

Eine Kugel liegt auf einem flachen Tisch. Drei Federn, F_1 , F_2 bzw. F_3 sind mit dem einen Ende an den Punkten $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (3, 5)$ bzw. $P_3 = (5, 3)$ befestigt und mit dem anderen Ende jeweils mit der Kugel verbunden.

Die Federn haben im gespannten Zustand eine potenzielle Energie von $E_1 = 10d_1^2$, $E_2 = 4d_2^2$ und $E_3 = 12d_3^2$. Dabei bezeichnet d_i die Länge der gespannten Feder, in unserem Fall also den Abstand des Punktes P_i vom Standort der Kugel.

Bei welcher Lage der Kugel wird die Gesamtenergie $E_1 + E_2 + E_3$ minimiert? (Wenn das System frei von äußeren Einflüssen ist, wird die Kugel nach einer Weile automatisch an diesem Punkt zur Ruhe kommen.)



(10 Punkte)

(bitte wenden)

2. Welche der folgenden Differentialformen sind exakt in ihrem Definitionsbereich, und wie lauten gegebenenfalls die Stammfunktionen?

- (a) $x dx + y dy$
- (b) $y dx - x^2 dy$
- (c) $y dx + x dy$
- (d) $\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$
- (e) $dx + x dy$
- (f) $y dx - y^2 dy$
- (g) $yz dx + xz dy + y dz$
- (h) $yz dx + (x - 2y)z dy + (x - y)y dz$.

(15 Punkte)

3. Die Differentialform

$$\omega := -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

sei definiert auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- (a) Ist ω exakt?
- (b) Beschreiben Sie das zugehörige Vektorfeld $f = (f_1, f_2)$ auf U mittels einer Zeichnung.
- (c) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ der geschlossene Weg $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ mit Anfangs- und Endpunkt $(1, 0)$.
Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \omega.$$

(15 Punkte)