

## Mathematik für Naturwissenschaftler II

### Übungsblatt 11

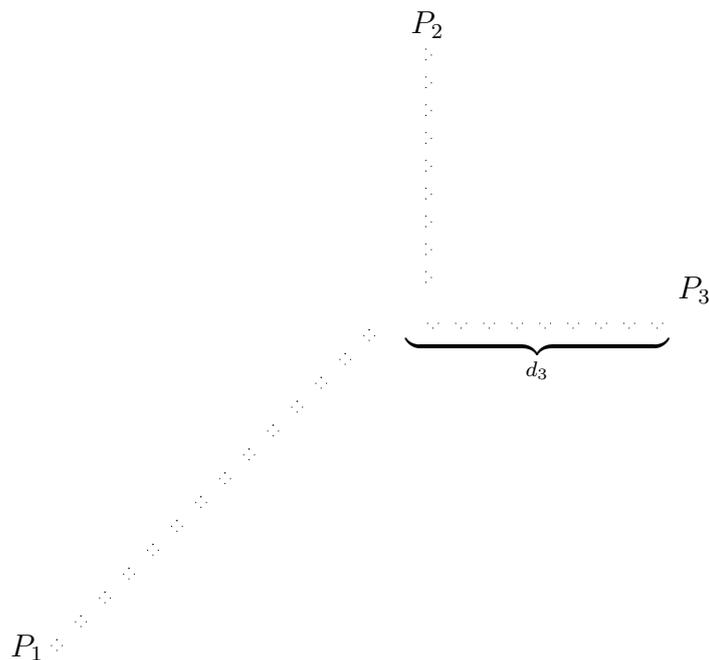
**Abgabetermin Donnerstag, den 30.6.2005 vor der Vorlesung.**

1. Betrachten Sie folgende Versuchsanordnung:

Eine Kugel liegt auf einem flachen Tisch. Drei Federn,  $F_1$ ,  $F_2$  bzw.  $F_3$  sind mit dem einen Ende an den Punkten  $P_1 = (1, 1)$ ,  $P_2 = (3, 5)$  bzw.  $P_3 = (5, 3)$  befestigt und mit dem anderen Ende jeweils mit der Kugel verbunden.

Die Federn haben im gespannten Zustand eine potenzielle Energie von  $E_1 = 10d_1^2$ ,  $E_2 = 4d_2^2$  und  $E_3 = 12d_3^2$ . Dabei bezeichnet  $d_i$  die Länge der gespannten Feder, in unserem Fall also den Abstand des Punktes  $P_i$  vom Standort der Kugel.

Bei welcher Lage der Kugel wird die Gesamtenergie  $E_1 + E_2 + E_3$  minimiert? (Wenn das System frei von äußeren Einflüssen ist, wird die Kugel nach einer Weile automatisch an diesem Punkt zur Ruhe kommen.)



**(10 Punkte)**

(bitte wenden)

2. Welche der folgenden Differentialformen sind exakt in ihrem Definitionsbereich, und wie lauten gegebenenfalls die Stammfunktionen?

- (a)  $xdx + ydy$
- (b)  $ydx - x^2dy$
- (c)  $ydx + xdy$
- (d)  $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$
- (e)  $dx + xdy$
- (f)  $ydx - y^2dy$
- (g)  $yzdx + xzdy + ydz$
- (h)  $yzdx + (x - 2y)zdy + (x - y)yzdz$ .

(15 Punkte)

3. Die Differentialform

$$\omega := -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

sei definiert auf  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

- (a) Ist  $\omega$  exakt?
- (b) Beschreiben Sie das zugehörige Vektorfeld  $f = (f_1, f_2)$  auf  $U$  mittels einer Zeichnung.
- (c) Es sei  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$  der geschlossene Weg  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  mit Anfangs- und Endpunkt  $(1, 0)$ .  
Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \omega.$$

(15 Punkte)