

Mathematik für Naturwissenschaftler II Übungsblatt 12

Abgabetermin Donnerstag, den 7.7.2005 vor der Vorlesung.

1. Betrachten Sie die reversible Reaktion $Na^+ + OH^- \rightleftharpoons NaOH$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto \begin{pmatrix} c(Na^+, t) \\ c(OH^-, t) \\ c(NaOH, t) \end{pmatrix},$$

wobei $c(\cdot, t)$ jeweils die Konzentration des entsprechenden Stoffes zum Zeitpunkt t bezeichnet. Dabei gilt:

- Die Umwandlungsgeschwindigkeit von rechts nach links ist proportional zur Konzentration von $NaOH$.
- Die Umwandlungsgeschwindigkeit von links nach rechts ist sowohl proportional zur Konzentration von Na^+ als auch proportional zur Konzentration von OH^- .

Stellen Sie aufgrund dieser Informationen eine Differentialgleichung für f auf.

Hinweis: Sie müssen bei Ihrer Differentialgleichung mehrere Proportionalitätskonstanten einführen. In der Praxis muss man diese dann entweder nachschlagen oder experimentell bestimmen.

(10 Punkte)

2. Finden Sie alle Funktionen y , die die Differentialgleichung $e^{y(x)}y'(x) = \sin(x)$ erfüllen, indem Sie eine Variablentrennung durchführen.

(10 Punkte)

(bitte wenden)

3. Eine Funktion $y : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y &= 0 \\ y'(0) &= \frac{1}{2} . \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

Berechnen Sie näherungsweise $y(2)$ wie folgt:

- Gehen Sie davon aus, dass y in einer Umgebung von 0 analytisch ist, d.h. schreiben Sie $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ als Potenzreihe mit zunächst unbekanntem Koeffizienten a_n .
- Geben Sie a_0 und a_1 an, und stellen Sie eine Rekursionsformel für die Berechnung der a_n auf.
- Berechnen Sie die ersten a_n mit Hilfe Ihrer Formel und stellen Sie eine Vermutung darüber auf, wie die allgemeine Formel für die a_n lautet.
- Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.
- Sie haben y nun als Potenzreihe geschrieben. Zeigen Sie, dass man $y(2)$ durch diese Potenzreihe annähern kann, indem Sie den Konvergenzradius Ihrer Reihe berechnen.
- Berechnen Sie $y(2)$ näherungsweise, indem Sie die ersten Terme der Potenzreihe für $x = 2$ ausrechnen. (Wie viele Terme erachten Sie als sinnvoll?)

Bemerkung: Wenn Sie die allgemeine Formel nicht erraten können, so können Sie trotzdem (mit der Rekursionsformel) die ersten Terme der Potenzreihe und damit die "Näherung" für $y(2)$ berechnen. Wenn Sie jedoch den Potenzradius nicht kennen, dann wissen Sie nicht, ob Ihr Ergebnis tatsächlich eine Näherung ist, oder ob Sie etwas komplett Unsinniges ausgerechnet haben. In diesem Fall müssen Sie also auf Ihr Glück vertrauen...

(20 Punkte)

Die **Klausur** findet am Donnerstag, 21.7.2005, von 11.00 Uhr (**s.t.**) bis 13.00 Uhr in HS II statt.

Bitte bringen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zur Identifikation mit. Als Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen aller Art zugelassen. Nicht zugelassen sind elektronische Hilfsmittel, also insbesondere keine Taschenrechner oder Handys.