Mathematik für Naturwissenschaftler II
Übungsblatt 2

Abgabetermin Donnerstag, den 28.4.2005 vor der Vorlesung.

1. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Geben Sie an, welche der folgenden Ausdrücke dann definiert sind, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

   (a) $A \cdot B$
   (b) $B \cdot A$
   (c) $A \cdot C$
   (d) $C \cdot A$
   (e) $B \cdot C$
   (f) $C \cdot B$
   (g) $(A \cdot B) \cdot C$
   (h) $A \cdot (B \cdot C)$

2. Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 5 & -6 & -12 \\ 2 & -5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Seien $U := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $U' := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \\ -5 & 6 & 13 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Zeigen Sie:
   - $U'U = E_3$.
   - $UU' = E_3$.
   - $UDU' = A$.

   (b) Berechnen Sie A^{10} $(= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{10 mal}})$.

3. Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Führen Sie mit der Matrix A die folgenden Operationen durch:

   - Multiplizieren Sie die zweite Zeile mit -1 und die dritte Zeile mit -2.
   - Addieren Sie bei der neu gewonnenen Matrix die erste Zeile einmal zur zweiten Zeile und einmal zur dritten Zeile hinzu.

   Auf diese Weise erhalten Sie eine neue Matrix A'. Führen Sie die selben Operationen auch mit dem Vektor b durch, um einen Vektor b' zu erhalten.
   Betrachten Sie die beiden linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $A'x = b'$, jeweils mit $x \in \mathbb{R}^3$. Wie hängen die Lösungen dieser beiden Gleichungssysteme miteinander zusammen? Welches System ist leichter lösbar?
   Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $Ax = b$.

4. (a) Welche der folgende Mengen sind eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   1. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
   2. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
   3. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
   4. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
   5. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   6. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   (b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:
   Sind je zwei der Vektoren a, b, c linear unabhängig (d.h. die Mengen $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ und $\{b, c\}$), so ist auch $\{a, b, c\}$ linear unabhängig.
   Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis bzw. durch ein Gegenbeispiel.