Mathematik für Naturwissenschaftler II
Übungsblatt 3

Wenn Sie in der Übungsgruppe am Montag sind, dann geben Sie das Blatt bitte am Montag, den 9.5.2005 dort ab. Für alle anderen ist der Abgabetermin am Dienstag, den 10.5.2005 vor der Vorlesung.

1. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ und $A' := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Zeigen Sie, dass A linksinvers zu A' bzw. A' rechtsinvers zu A ist, d.h. zeigen Sie, dass $AA' = E_3$ ist.

   (b) Sei $N \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ eine Matrix mit der Eigenschaft $NA' = 0$. Zeigen Sie, dass $A + N$ ebenfalls linksinvers zu A' ist.

   (c) Sei umgekehrt $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ linksinvers zu A'. Zeigen Sie, dass für $\tilde{N} := \tilde{A} - A$ wiederum $\tilde{N}A' = 0$ gilt.

   (d) Geben Sie analog zu (b) und (c) einen Zusammenhang zwischen Matrizen $N \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ mit $AN = 0$ und zwischen rechtsinversen Matrizen zu A an.

   (e) Finden Sie eine weitere rechtsinverse Matrix zu A und eine weitere linksinverse Matrix zu A'.

   (f) Nun seien $b \in \mathbb{R}^3$ und $b' \in \mathbb{R}^4$ gegeben. Für welche der beiden Gleichungen $Ax = b$ (mit $x \in \mathbb{R}^4$) und $A'x = b'$ (mit $x \in \mathbb{R}^3$) können Sie mit Hilfe des halbseitigen Inversen sofort eine Lösung angeben? Geben Sie für diese Gleichung jeweils zwei Lösungen für jedes b (oder b') aus der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ (oder $\mathbb{R}^3$) an.

(20 Punkte)

(bitte wenden)

2. Bringen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 6 & -9 & 3 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -4 & 4 & -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & -2 & -4 & 0 & 7 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 4 & 2 & -3 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & 8 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 6 & -7 & 2 & -2 & 3 & 3 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 8 & -10 & 3 & -2 & -2 & 3 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

in Gaußgestalt.
Hinweis: Sie müssen bei der Durchführug des Algorithmus an einer Stelle die zweite Zeile mit einer anderen vertauschen und haben dabei mehrere Möglichkeiten. Wenn Sie die zweite Zeile in dieser Situation mit der *dritten* Zeile vertauschen, dann sollten Sie nach einigen weiteren Schritten folgende Matrix als Zwischenergebnis erhalten:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -2
\end{pmatrix}.$$

(20 Punkte)