Mathematik für Naturwissenschaftler II
Übungsblatt 5

Abgabetermin Donnerstag, den 19.5.2005 vor der Vorlesung.

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie die Eigenwerte von A, und geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.

   (**10 Punkte**)

2. Sei $N \in \mathbb{K}^{n,n}$ nilpotent, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$.
   Zeigen Sie, dass $E_n + A$ invertierbar ist.

   (**10 Punkte**)

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}$$

   (a) Berechnen Sie $det(A_2)$.
   (b) Berechnen Sie $det(A_3)$. Schreiben Sie Ihr Ergebnis als Produkt.
   (c) Was ist $det(A_4)$ und was ist generell $det(A_n)$? Versuchen Sie, Ihre Vermutung zu beweisen.

   (**10 Punkte**)

4. Sei $a, b, c \in \mathbb{K}$ gegeben. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2b & 3 & 4b^2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 3c & 1 & 3c^2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Wann ist die Determinante 0?
   Hinweis: Verwenden Sie zunächst Zeilen- und Spaltenvertauschungen, um die Matrix auf eine Blockgestalt zu bringen, bei der ein Block verschwindet. (Das bedeutet, dass z.B. im linken unteren Teil der Matrix nur Nullen auftauchen). (**10 Punkte**)