Mathematatik für Naturwissenschaftler II
Übungsblatt 6

Wenn Sie in einer Übungsgruppe am Montag sind, dann geben Sie das Blatt bitte am Montag, den 30.5.2005 dort ab. Für alle anderen ist der Abgabetermin am Dienstag, den 31.5.2005 vor der Vorlesung.

1. Sei $A \in K^{n,n}$. Sei U eine invertierbare Matrix. Wir betrachten die Matrix $\tilde{A} := UAU^{-1}$.

   (a) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, und $x \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von A bezüglich λ. Zeigen Sie: $\tilde{A}$ hat ebenfalls den Eigenwert λ, und Ux ist ein Eigenvektor von $\tilde{A}$ bezüglich λ. Formulieren und begründen Sie auch die Umkehrung.

   (b) Zeigen Sie: $\ker(\tilde{A}) = U(\ker(A))$ $(= \{Ux | x \in \ker(A)\})$.

   (c) Angenommen, $\tilde{A}$ hat Diagonalgestalt. Zeigen Sie, dass dann jeder Diagonaleintrag von $\tilde{A}$ ein Eigenwert von A sein muss. Geben Sie in diesem Fall jeweils n linear unabhängige Eigenvektoren von $\tilde{A}$ und von A an.

(15 Punkte)

2. Betrachten Sie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Fassen Sie diese Matrix zunächst als $\mathbb{R}^{3,3}$-Matrix auf. Bestimmen Sie ihre Eigenwerte.

   (b) Fassen Sie die Matrix nun als $\mathbb{C}^{3,3}$-Matrix auf. Bestimmen Sie wiederum die Eigenwerte.

   (c) Beschreiben Sie, wie man effizient A^{100} berechnen könnte. Sie brauchen die Rechnung dazu nicht im Einzelnen durchzuführen. Macht es für das Ergebnis einen Unterschied, ob A eine Matrix über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ war?
   Hinweis: Blatt 2, Aufgabe 2

(10 Punkte)

(bitte wenden)

3. Betrachten Sie folgendes Szenario:
Sie wollen einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bestimmen und wissen, dass dieser Vektor die Gleichung $Ax = b$ erfüllt, wobei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine invertierbare Matrix ist, die Sie (exakt) kennen, und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor ist, den Sie messen können. Bei der Messung treten jedoch kleine Messfehler auf, sodass Sie nicht den Vektor b kennen, sondern nur einen Vektor $\tilde{b}$, der ein wenig von b abweicht. Der relative Messfehler beträgt also $\frac{|\tilde{b}-b|}{|b|}$.(*)
Hat die Matrix A nun Eigenwerte, die betragsmäßig stark voneinander abweichen, so kann schon ein kleiner Fehler bei der Messung von b einen großen Fehler bei der Berechnung von x nach sich ziehen. Man nennt das Problem dann *schlecht konditioniert*. Diesen Effekt sollen Sie sich anhand der folgenden Aufgabe klar machen.

Seien hierzu speziell $\lambda_1 = 10$ und $\lambda_2 = \frac{1}{10}$ Eigenwerte von A und seien v_1 und v_2 normierte(*) Eigenvektoren von A bezüglich λ_1 bzw. λ_2.
Nehmen Sie an, der exakte Wert sei gerade $b = v_1$, sie messen aber den Wert $\tilde{b} = b + \frac{1}{10} v_2$.

(a) Berechnen Sie unter diesen Bedingungen den relativen Messfehler von $\tilde{b}$.

(b) Finden Sie die Lösung x_0 der Gleichung $Ax = b$.

(c) Finden Sie die Lösung $\tilde{x_0}$ der Gleichung $Ax = \tilde{b}$. (Sie können die Lösung durch scharfes Hinsehen erraten.)

(d) Berechnen Sie den relativen Fehler von $\tilde{x_0}$ gegenüber dem "richtigen" Ergebnis x_0.

(*) In der Aufgabenstellung ist $|x|$ der *Absolutbetrag* oder auch *euklidische Betrag* eines Vektors, wie er aus der Schule bekannt ist. Er ist über die Formel

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

definiert. Sie benötigen für diese Aufgabe nur die Eigenschaft, dass man Skalarfaktoren herausziehen kann, dass also für $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|ax| = |a| \cdot |x|$. Sie dürfen diese und ähnliche Eigenschaften für diese Aufgabe ohne Beweis verwenden.
Die Bedingung, dass v_1 und v_2 *normiert* sein sollen, bedeutet, dass $|v_1| = |v_2| = 1$ ist. Diese Forderung ist übrigens keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

(15 Punkte)