Mathematik für Naturwissenschaftler II
Übungsblatt 8

Abgabetermin Donnerstag, den 9.6.2005 vor der Vorlesung.

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,
   und sei ein Skalarprodukt durch $\langle x, y \rangle := x^T A y$ definiert. (Sie brauchen nicht zu prüfen, dass es sich tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt.)

   - Transformieren Sie die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ in eine orthonormale Basis (bezüglich des obigen Skalarproduktes).
   - Geben Sie eine obere Dreiecksmatrix C an, sodass $C^T A C = E$ ist.
   - Geben Sie eine obere Dreiecksmatrix D an, sodass $A = D^T D$ ist.

   (**10 Punkte**)

2. Für zwei Vektoren $x := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ in $V = \mathbb{R}^3$ definieren wir das Vektorprodukt $x \times y$ durch:

$$x \times y := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \rightarrow & V \\ (x, y) & \mapsto & x \times y \end{array}$$

   - ist bilinear;
   - ist schiefsymmetrisch, d.h. es gilt $x \times y = -(y \times x)$;
   - erfüllt die Äquivalenzbedingung: $x \times y = 0 \Leftrightarrow \{x, y\}$ ist linear abhängig;
   - erfüllt $(x \times y) \perp x$ und $(x \times y) \perp y$.
   - erfülllt die "Rechte-Hand-Regel" $e_1 \times e_2 = e_3$.

   (b) Berechnen Sie einen Vektor des $\mathbb{R}^3$, der senkrecht auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ steht.

   (**10 Punkte**)

3. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

(a) Berechnen Sie die Matrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$ von V.

(b) Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Basis $\mathfrak{B}$ durch.

(c) Berechnen Sie für alle $f, g \in \mathfrak{B}$ den Winkel zwischen f und g. (Sie benötigen einen Taschenrechner o.Ä. für die Auswertung des arccos.)

(d) Sei $b_3 := x^2 \in V$. Für welches Polynom $g(x)$ des Grades ≤ 1 wird der Fehler $\|g - b_3\|$ minimal? Fertigen Sie eine Skizze an.

(20 Punkte)