SEMINAR LIE ALGEBREN UND IHRE DARSTELLUNG - VORTRAG 2

von Meike Recktenwald 28.04.2015

Marius Sophus Lie (* 17. Dezember 1842 in Nordfjordeid; † 18. Februar 1899 in Kristiania, heute Oslo) war ein norwegischer Mathematiker. Seine Eltern waren Johann Lie, ab 1851 Pastor in Moss am Kristianiafjord, und dessen Ehefrau Mette Stabell. Sophus Lie heiratete im Jahr 1874 Anna Birk (1854–1920); sie war die Tochter des Oberzollbeamten Gottfried Jörgen Stenersen Birk und dessen Ehefrau Marie Elisabeth Simonsen. Das Paar hatte einen Sohn Herman (1884–1960) und zwei Töchter Marie und Dagny. Lie studierte von 1859 bis 1865 in Kristiania Naturwissenschaften und legte 1865 das Reallehrerexamen ab. Lie war zunächst unschlüssig über seine weitere Laufbahn und wandte sich erst 1868 der Mathematik zu. Hier begründete er die Theorie der kontinuierlichen Symmetrie und verwendete sie zur Untersuchung von Differentialgleichungen und geometrischen Strukturen. Ausschlaggebend für Lies weitere Laufbahn wurde die Bekanntschaft und Freundschaft mit Felix Klein, mit dem er 1870 nach Paris reiste und gemeinsame Arbeiten über Transformationsgruppen schrieb. 1872 wurde Lie Professor in Christiania, und 1886 wurde er als Nachfolger Kleins (der nach Göttingen wechselte) nach Leipzig berufen. Viele Begriffe und Sätze sind mit Lies Namen verbunden, u. a. Lie-Klammer, Lie'sche Sätze, Satz von Lie.

1. Definitionen

Lie Algebren treten als Vektorräume von linearen Abbildungen auf, versehen mit einer neuen Verknüpfung, die weder kommutativ noch assoziativ ist:

$$[xy] := xy - yx\,.$$

Lie Algebren spielen eine wichtige Rolle in der Algebra, der Theorie der Lie-Gruppen (diese sind ein wichtiges Werkzeug in der mathematischen Physik, insbesondere in der Quantenmechanik, der Quantenchromodynamik und für Eichtheorien) und vielen weiteren Gebieten der Mathematik. Die algebraische Struktur dieser mathematischen Gruppen bildet in der Physik die Grundlage, um die Eigenschaften von Symmetrien zu beschreiben. Dieses "System" lässt sich abstrakt durch drei Axiome beschreiben.

Definition 1.1. Es sei L ein Vektorraum über einem Körper K, versehen mit einer Verknüpfung $L \times L \to L, (x, y) \mapsto [xy]$.
L ist eine *Lie Algebra*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:
(A1) Die Klammer ist bilinear, d.h.
a) Für alle $x \in L$ ist $f(x, \ ) : L \to L, y \mapsto f(x, y) = [xy]$ linear;
b) Für alle $y \in L$ ist $f(\ , y) : L \to L, x \mapsto f(x, y) = [xy]$ linear.
(A2) $[xx] = 0$ für alle $x \in L$.
(A3) $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$ für alle $x, y, z \in L$ *"Jacobi Identität"*.
Dabei nennt man $[xy]$ *Lie-Klammer* oder *Kommutator* von x und y.

Remark 1.2. (i) (A1) und (A2), angewendet auf $[x + y, x + y]$, impliziert Antikommutativität.
Das heißt es gilt: (A2') $[xy] = -[yx]$.
Außderdem ist die Lie-Klammer nicht assoziativ.
(ii) Umgekehrt gilt: (A2') $\Longrightarrow$ (A2), falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$.
(iii) Die Jacobi Identität gilt für $[xy] = xy - yx$.

Proof. (i)

$$\begin{aligned} [x + y, x + y] &= [x, x + y] + [y, x + y] \\ &= [xx] + [xy] + [yx] + [yy] \\ &= 0\,. \\ \text{(wegen(A2))} &\rightsquigarrow [xy] = -[yx]\ . \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{array}{rccccl} & & [xy] & = & -[yx] & \\ & \Leftrightarrow & [xy] + [yx] & = & 0 & \\ \text{Setze } y := x & \rightsquigarrow & 2[xx] & = & 0 & \\ & \rightsquigarrow & [xx] & = & 0 & \text{(A2)} \end{array}$$

(iii)

$$\begin{aligned} [x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] &= x[yz] - [yz]x + y[zx] - [zx]y + z[xy] - [xy]z \\ &= x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) \\ &\quad -(zx - xz)y + z(xy - yx) - (xy - yx)z \\ &= xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz \\ &\quad -zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

$\square$

Wir betrachten im Folgenden *ausschließlich endlich dimensionale* Vektorräume L.

Example 1.3. Kreuzprodukt

Sei L der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Wir definieren

$$[xy] = x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 \\ x_3y_1 - y_3x_1 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$$

(Kreuzprodukt über Vektoren) für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in L$.

Claim. L ist Lie Algebra.

Proof. Dazu zeigen wir, dass (A1)-(A3) erfüllt sind.

(A1) Die Klammeroperation, hier das Kreuzprodukt, ist bilinear. Denn:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda x + z) \times y & = & \lambda(x \times y) + (z \times y) \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda x_1 + z_1 \\ \lambda x_2 + z_2 \\ \lambda x_3 + z_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} & = & \dots \\ & = & \begin{pmatrix} \lambda x_2y_3 + z_2y_3 - \lambda x_3y_2 - z_3y_2 \\ \lambda x_3y_1 + z_3y_1 - \lambda x_1y_3 - z_1y_3 \\ \lambda x_1y_2 + z_1y_2 - \lambda x_2y_1 - z_2y_1 \end{pmatrix} \\ & = & \lambda(x \times y) + (z \times y) \end{array}$$

Ebenso für $x \times (\lambda y + z)$.

Damit ist gezeigt, dass $f : L \times L \to L, (x, y) \mapsto [xy] = x \times y$ bilinear ist.

(A2) $[xx] = 0$ ist für alle $x \in L$ erfüllt, denn: Sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{array}{rcl} [xx] & = & x \times x \\ & = & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} x_2x_3 - x_3x_2 \\ x_3x_1 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - x_2x_1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad 0\,. \end{array}$$

(A3) Ebenso wie in (A2) lässt sich $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$ für alle $x, y, z \in L$ zeigen. □

Example 1.4. Abelsche Lie Algebra

L sei ein endlich dimensionaler Vektorraum über K. L ist eine Lie Algebra durch $[xy] := 0$ für alle $x, y \in L$. Eine solche Algebra mit der trivialen Multiplikation heißt *abelsch* (denn x und y kommutieren).

Definition 1.5. Zwei Lie Algebren L, L' über K heißen *isomorph*, wenn ein Vektorraumisomorphismus $\Phi : L \to L'$ mit $\Phi([xy]) = [\Phi(x)\Phi(y)]$ für alle $x, y \in L$ existiert. Φ heißt *Isomorphismus* von Lie Algebren.
Ein Unterraum U von L heißt *Lie Unteralgebra*, wenn $[xy] \in U$ für $x, y \in U$.
Insbesondere ist U selbst eine Lie Algebra mit obiger Verknüpfung.

Remark 1.6. Jedes von Null verschiedene Element $0 \neq x \in L$ definiert eine eindimensionale Unteralgebra Kx mit gewöhnlicher Multiplikation (wegen (A2) und $0 \in U$).

Definition 1.7. Es sei V ein Vektorraum der Dimension n über K. Dann bezeichnet *End V* die Menge aller linearen Abbildungen $V \to V$. Als Vektorraum über K besitzt *End V* die Dimension $\dim(End\ V) = n^2$ und bildet einen Ring bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation. Wir definieren eine neue Verknüpfung $[xy] = xy - yx$, die wir als Klammer von x und y bezeichnen. (Mit diesen Verknüpfungen ist *End V* eine Lie Algebra über K.)

Remark 1.8. Zur Unterscheidung dieser neuen algebraischen, nicht assoziativen Struktur: Wir schreiben $\mathfrak{gl}(V)$ (*general linear algebra*) für *End V* als Lie Algebra (aufgrund der Ähnlichkeit zu GL (V), die aus allen invertierbaren Endomorphismen von V besteht). Kurz: $\mathfrak{gl}(V)$ bei einem Endomorphismenring als Lie Algebra; GL(V) bei einem Endomorphismenring ohne Struktur der Lie Algebra. $\mathfrak{gl}(V)$ wird hingegen auch verwendet, wenn V nicht endlich dimensional ist.

Definition 1.9. Jede Unteralgebra einer Lie Algebra $\mathfrak{gl}(V)$ heißt *lineare Lie Algebra.*

Remark 1.10. Es ist bekannt, dass tatsächlich jede endlich dimensionale Lie Algebra isomorph zu einer linearen Lie Algebra ist. (Theoreme von *Ado* und *Iwasawa*)

Solche linearen Lie Algebren werden wir im Folgenden genauer betrachten, z.B. $\mathfrak{sl}(V)$ (siehe Definition 2.1).

1.0.1. *Zunächst aber der Bezug zu Matrizen:* Es sei B Basis von V. Dann ist $\mathfrak{gl}(V)$ die Menge aller $n \times n$- Matrizen über K, d.h. ein Ring der Dimension n^2. Wir schreiben dafür auch $\mathfrak{gl}(n, K)$.
Zum praktischen Rechnen: Um die Multiplikationstabelle von $\mathfrak{gl}(n, K)$ zu erstellen, berechnen wir die Klammer auf den Basiselementen e_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ ($e_{i,j}$ besitzt an der Stelle i, j den Eintrag 1 und enthält ansonsten nur Nullen) der Standardbasis von V: Aus

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$$

folgt:

$$[e_{ij,}e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj} \qquad .$$

Die Koeffizienten von $[e_{ij,}e_{kl}]$ sind also insbesondere entweder ± 1 oder 0.

2. Beispiele

2.1. **Nun zu einigen weiteren Beispielen, die zentral sind für die Theorie der Lie Algebren: Diese fallen in vier Familien A_l, B_l, C_l, D_l ($l \geq 1$) und heißen *klassische Algebren*. (Der Begriff ist daher so gewählt, da diese mit einigen der klassischen linearen Lie Gruppen übereinstimmen.)**

2.1.1. *Beginnen wir mit A_l. Sei $dim(V) = l + 1$.*

Definition 2.1. Die Menge aller Endomorphismen von V mit der Spur $tr = 0$ heißt *spezielle lineare Algebra* ($\mathfrak{sl}(V)$ oder $\mathfrak{sl}(l+1, K)$).

Remark 2.2. (i) Die *Spur* (*trace*) einer Matrix ist die Summe der Diagonaleinträge. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis von V. Also macht der Begriff der Spur auch für Endomorphismen Sinn.

(ii) Der Begriff ist entsprechend der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}(V)$ von Endomorphismen mit Determinante 1 gewählt.

Lemma 2.3. *$\mathfrak{sl}(V)$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$.*

Proof. Denn es gilt: (i) $tr(xy) = tr(yx)$ und (ii) $tr(x + y) = tr(x) + tr(y)$.

Sei $x, y \in \mathfrak{sl}(V)$, d.h. es gilt $tr(x) = 0$ und $tr(y) = 0$. Wir betrachten

$$tr([xy]) = tr(xy - yx) \overset{(ii)}{=} tr(xy) - tr(yx) \overset{(i)}{=} 0 \quad .$$

Daraus folgt $[xy] \in \mathfrak{sl}(V)$ und $\mathfrak{sl}(V)$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. □

Wir berechnen nun die Dimension von $\mathfrak{sl}(V)$:

1.Ansatz: $\mathfrak{sl}(V)$ ist eine echte Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ($\mathfrak{sl}(V) \subsetneq \mathfrak{gl}(V)$). Deshalb gilt für die Dimension höchstens $dim(\mathfrak{sl}(V)) = (l+1)^2 - 1$.

2.Ansatz: Im Folgenden untersuchen wir linear unabhängige Matrizen mit $tr = 0$: Wir betrachten alle $e_{ij} (i \neq j)$ und alle $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ $(1 \leq i \leq l)$, im Gesamten also $(l+1)^2 - (l+1) + l = (l+1)^2 - 1$ viele Matrizen, die eine Basis für $\mathfrak{sl}(V)$ bilden.

Wir betrachten diese im Folgenden als die Standardbasis für $\mathfrak{sl}(l+1, K)$.

2.1.2. *Nun betrachten wir die klassische Algebra C_l . Hierfür sei $dim(V) = 2l$ mit Basis $(v_1, v_2, ..., v_{2l})$.* Hierbei betrachten wir die von den

$$x = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} ,$$

mit $m, n, p, q \in \mathfrak{gl}(l, V)$ erzeugte Lie Algebra, wobei die Bedingung

$$sx = -x^t s$$

mit

$$s = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt sein muss.

Dann gilt:

$$sx = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ -m & -n \end{pmatrix}$$

und

$$-x^t s = \begin{pmatrix} -m^t & -p^t \\ -n^t & -q^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^t & -m^t \\ q^t & -n^t \end{pmatrix} .$$

Also muss für solche x gelten: (1) $n^t = n$, (2) $p^t = p$ und (3) $m^t = -q$. Die letzte Bedingung zeigt, dass $tr(x) = 0$ und die Dimension von V gerade sein muss.
Dies definiert eine Lie Algebra, denn $\mathfrak{sp}(V)$ ist unter der Lie-Klammer abgeschlossen.

Definition 2.4. Die gerade definierte Algebra mit $sx = -x^t s$ heißt *symplektische Algebra* $\mathfrak{sp}(V)$ oder $\mathfrak{sp}(2l, K)$.

Remark 2.5. Man kann diese Lie Algebra auch interpretieren als Menge von Endomorphismen: Eine Algebra, die aus allen Endomorphismen x von V besteht und $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$ erfüllt (dabei ist f nichtausgeartete Blinearform mit Darstellungsmatrix s), heißt *symplektische Algebra.*

Wir wollen nun eine Basis für $\mathfrak{sp}(2l, K)$ berechnen:
1) Hierfür betrachten wir für m und q die Diagonalmatrizen $e_{ii} - e_{l+i,l+i}$ $(1 \leq i \leq l) \rightsquigarrow l$ viele
2) Addiere zu diesen $e_{ij} - e_{l+j,l+i}$ $(1 \leq i \neq j \leq l) \rightsquigarrow l^2 - l$ viele
3) Für n betrachten wir die Matrizen $e_{i,l+i}$ $(1 \leq i \leq l)$ und $e_{i,l+j} + e_{j,l+i}$ $(1 \leq i < j \leq l) \rightsquigarrow l + \frac{1}{2}l(l-1)$ viele
4) Ebenso für p.
Insgesamt folgt: $dim(\mathfrak{sp}(2l, K)) = l + l^2 - l + 2(l + \frac{1}{2}l(l-1)) = ... = 2l^2 + l$.

Remark 2.6. Es handelt sich bei diesen um alle Basiselemente wegen der Blockstruktur (denn n und p sind symmetrisch, d.h. diese haben die gleiche Basis, und m und q hängen zusammen, d.h. auch ihre Basiselemente hängen zusammen.)

Die beiden weiteren klassischen Algebren werden im Folgenden nur kurz angesprochen.

2.1.3. *Zu B_l. Sei $dim(V) = 2l + 1$.* Wir betrachten eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform f von V mit der Abbildungsmatrix

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix} .$$

Sei

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix} .$$

Hier müssen gleiche Bedingungen wie bei C_l gelten: $sx = -x^t s$ mit (1) $a = 0$, (2) $c_1 = -b_2^t$, (3) $c_2 = -b_1^t$, (4) $q = -m^t$, (5) $n^t = -n$, (6) $p^t = -p$.
Auch diese Lie Algebra lässt sich als Endomorphismus interpretieren:

Definition 2.7. Die Menge aller Endomorphismen von V , die

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w))$$

(gleiche Bedingung wie bei C_l), erfüllen, heißt *orthogonale Algebra* ($\mathfrak{o}(V)$ oder $\mathfrak{o}(2l + 1, K)$)

Eine Basis lässt sich ähnlich wie bei C_l finden, mit $dim(\mathfrak{o}(2l + 1, K)) = 2l^2 + l$.

2.1.4. *Zu D_l. Hierbei geht es um eine andere orthogonale Algebra. Die Konstruktion dieser ist identisch zu der von B_l, wobei $dim(V) = 2l$ und*

$$s = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $dim(\mathfrak{o}(2l, K)) = 2l^2 - l$.

Remark 2.8. Für kleine Werte von l existieren Isomorphismen zwischen einigen bestimmten klassischen Lie Algebren.

Example 2.9. A_1 und C_1 sind isomorph.

Es sei $x \in A_1$. Für A_1 mit $dim(V) = 2$ und $tr(x) = 0$ wähle

$$x \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}.$$

Weiter sei $y \in C_1$. Für C_1 mit $dim(V) = 2$ und s wie oben mit $sy = -y^t s$ wähle

$$y \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}.$$

Man sieht direkt, dass x und y identisch sind, und somit einen Isomorphismus durch die Identitätsabbildung bilden.

Remark 2.10. A_1, B_1, C_1 sind alle isomorph. Weiter ist B_2 isomorph zu C_2, D_3 zu A_3.

2.2. **Abschließend zu den Unteralgebren betrachten wir einige weitere Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(n, K)$, die eine wichtige Nebenrolle im weiteren Verlauf spielen.**

2.2.1. *Es ist $\mathfrak{t}(n, K)$ die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen (a_{ij}), mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$.*

2.2.2. *Es ist $\mathfrak{n}(n, K)$ die Menge aller strikten oberen Dreiecksmatrizen (a_{ij}), mit $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$.*

2.2.3. *Es ist $\mathfrak{d}(n, K)$ die Menge aller Diagonalmatrizen.*

Definition 2.11. Sind H, K Unteralgebren von L, so bezeichnet $[H, K]$ den Unterraum von L, aufgespannt durch die Kommutatoren $[xy]$ mit $x \in H, y \in K$.

Lemma 2.12. *$\mathfrak{t}(n, K)$, $\mathfrak{n}(n, K)$ und $\mathfrak{d}(n, K)$ sind unter der Klammer abgeschlossen.*

Remark 2.13. Es gilt: $\mathfrak{t}(n, K) = \mathfrak{d}(n, K) + \mathfrak{n}(n, K)$ (direkte Summe über Vektorräume) mit $[\mathfrak{d}(n, K), \mathfrak{n}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K) \rightsquigarrow [\mathfrak{t}(n, K), \mathfrak{t}(n, K)] = \mathfrak{n}(n, K)$.

3. Derivationen

3.1. **Einige Lie Algebren treten in natürlicher Weise als sogenannte Derivationen auf.**

Definition 3.1. Unter einer *K-Algebra* (nicht notwendiger Weise assoziativ) versteht man einen Vektorraum $\mathfrak{U}$ über K, versehen mit einer bilinearen Verknüpfung $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$

Remark 3.2. Dabei beschreibt die Verknüpfung die "gewöhnliche" Multipklikation. Es sei denn $\mathfrak{U}$ ist eine Lie Algebra. In diesem Fall verwenden wir immer die Klammer.

Definition 3.3. Unter einer *Derivation* von $\mathfrak{U}$ verstehen wir eine lineare Abbildung $\delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, die die Produktregel $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$ erfüllt.

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Menge Der $\mathfrak{U}$ aller Derivationen von $\mathfrak{U}$ ein Untervektorraum von *End* $\mathfrak{U}$ ist:
(i) Der $\mathfrak{U} \neq \varnothing$, denn $\delta_0 \in$ Der $\mathfrak{U}$.
(ii) Man zeigt leicht

$$(\delta_1 + \lambda\delta_2)(ab) = ... = a((\delta_1 + \lambda\delta_2)(b)) + ((\delta_1 + \lambda\delta_2)(a))b \quad .$$

Es lässt sich ebenfalls nachprüfen, dass die Klammer $[\delta, \delta^{'}]$ von zwei Derivationen selbst eine Derivation ist. (Das gewöhliche Produkt muss keine solche sein. ☆)
Denn: $[\delta, \delta^{'}] = \delta\delta^{'} - \delta^{'}\delta$ mit $\delta, \delta^{'} \in$ Der $\mathfrak{U}$.

$$\begin{array}{rcl} (\delta\delta^{'} - \delta^{'}\delta)(ab) & = & \delta\delta^{'}(ab) - \delta^{'}\delta(ab) \\ & \underset{von\, End(\mathfrak{U})}{\overset{Der(\mathfrak{U})\, UVR}{=}} & a\delta\delta^{'}(b) + \delta\delta^{'}(a)b - a\delta^{'}\delta(b) - \delta^{'}\delta(a)b \\ & = & a((\delta\delta^{'} - \delta^{'}\delta)(b)) + ((\delta\delta^{'} - \delta^{'}\delta)(a))b \end{array}$$

Damit ist Der $\mathfrak{U}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$.
Zu ☆:

$$\begin{array}{rcl} \delta\delta^{'}(ab) & = & \delta(a\delta^{'}(b) + \delta^{'}(a)b) \\ & = & a\delta(\delta^{'}(b)) + \underbrace{\delta(a)\delta^{'}(b) + \delta^{'}(a)\delta(b)}_{\neq 0} + \delta(\delta^{'}(a))b \\ & \neq & a\delta\delta^{'}(b) + \delta\delta^{'}(a)b \end{array}$$

3.2. **Da eine Lie Algebra L eine K-Algebra in obigem Sinne ist, ist *Der* L definiert (als Raum aller Derivationen von L). Bestimmte Derivationen entstehen auf natürliche Weise, die wir im Folgenden genauer betrachten werden.**

Definition 3.4. Sei $x \in L$, so ist $y \mapsto [xy]$ ein Endomorphismus, den wir als $ad\, x$ bezeichnen.

Remark 3.5. Es gilt sogar $ad\, x \in Der\, L$. Dennn wir können die Jacobi Identität in der folgenden Form umschreiben (mit Hilfe von (A2')): $[x[yz]] = [y[xz]] + [[xy]z]$.
Denn: (A3) $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$;
(A2') $[xy] = -[yx]$

$$\begin{array}{rrcl} & [x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] & = & 0 \\ \Leftrightarrow & [x[yz]] & = & -[y[zx]] - [z[xy]] \\ \Leftrightarrow & [x[yz]] & = & [y[xz]] + [[xy]z] \end{array}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} ad(x)[yz] & = & [x[yz]] \\ & = & -[y[zx]] - [z[xy]] \\ & = & [y[xz]] + [[xy]z] \\ & = & [y, ad(x)z] + [ad(x)y, z] \quad . \end{array}$$

Solche Derivationen von L heißen *innere Derivationen*, alle anderen *äußere*.

Remark. Es ist möglich, dass $ad\, x = 0$, sogar wenn $x \neq 0$: Dies tritt beispielsweise bei eindimensionalen Lie Algebren auf.

Definition 3.6. Die Abbildung $L \to Der\, L, x \mapsto ad\, x$, die jedem x $ad\, x$ zuordnet, heißt *adjungierte Darstellung* von L.

Remark 3.7. (i) Diese Darstellung spielt eine entscheidende Rolle in den folgenden Vorträgen.

(ii) Manchmal gibt es den Fall, dass x gleichzeitig als Element von L und als Element einer Unteralgebra K von L betrachtet wird. Um Doppeldeutigkeit zu vermeiden, verwendet man die Notation $ad_L x$ oder $ad_K x$ um zu zeigen, welches x gemeint ist (als Element von L bzw. K.)

Example 3.8. Sei x eine Diagonalmatrix. Dann gilt: $ad_{\mathfrak{d}(n,K)}(x) = 0$, wobei $ad_{\mathfrak{gl}(n,K)}(x)$ nicht unbedingt 0 sein muss.

Lemma 3.9. *Sei $x \in \mathfrak{gl}(n, K)$ mit n verschiedenen Eigenwerten $a_1, ..., a_n$ in K.*

Die Eigenwerte von ad x sind genau die n^2 Skalare $a_i - a_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$, die nicht unbedingt verschieden sein müssen.

Proof. x besitzt n verschieden Eigenwerte, d.h. es existiert ein $s \in \mathfrak{gl}(n, K)$ mit

$$sxs^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & . & & 0 & \\ & & . & & \\ & 0 & & . & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} =: A.$$

Man sieht, dass für e_{ij} gerade $[A, e_{ij}] = (a_i - a_j) \cdot e_{ij}$ gilt.
Denn:

$$\begin{aligned} [A, e_{ij}] &= Ae_{ij} - e_{ij}A \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & . & & 0 & \\ & & . & & \\ & 0 & & . & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & 1_{ij} \\ & & \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} & & \\ & & 1_{ij} \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & . & & 0 & \\ & & . & & \\ & 0 & & . & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & & \\ & & (a_i)_{ij} \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & \\ & & (a_j)_{ij} \\ & & \end{pmatrix} \\ &= a_i \cdot e_{ij} - a_j \cdot e_{ij} \\ &= (a_i - a_j) \cdot e_{ij} \end{aligned}$$

Angewendet auf die Bedingung $ad\ x(y) = [xy] = \lambda y$ ergibt sich für λ

$$\rightsquigarrow \lambda = a_i - a_j \text{ wie gewünscht.}$$

$\square$

4. Abstrakte Lie Algebren (Fakultativ)

Example 4.1. *Strukturkonstanten* bezüglich der gewöhnlichen Basis $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wende die Klammer auf zwei Basiselemente an:
Für $[x_1x_2]$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
[x_1x_2] &= x_1 \times x_2 - x_2 \times x_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot x_3
\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich für $[x_1x_3]$ bzw. $[x_2x_3]$:

$$\begin{aligned}
[x_1x_3] &= -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -2 \cdot x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_2x_3] &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot x_1
\end{aligned}$$

Sei L eine Lie Algebra mit Basis $B = \{x_1, ..., x_n\}$. Die *Strukturkonstanten* a_{ij}^k ergeben sich wie folgt:

$$[x_ix_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k$$

Für obiges Beispiel bedeutet dies:

$$[x_1x_2] = a_{12}^1 x_1 + a_{12}^2 x_2 + a_{12}^3 x_3$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \quad & a_{12}^1 = 0 \\
& a_{12}^2 = 0 \\
& a_{12}^3 = 2
\end{aligned}$$

Analog für $[x_1 x_3]$ bzw. $[x_2 x_3]$:

$$[x_1 x_3] \quad \rightsquigarrow \quad a_{13}^1 = 0$$

$$a_{13}^2 = -2$$

$$a_{13}^3 = 0$$

$$[x_2 x_3] \quad \rightsquigarrow \quad a_{23}^1 = 2$$

$$a_{23}^2 = 0$$

$$a_{23}^3 = 0$$

Diese Strukturkonstanten lassen sich in einer (dreidimensionalen) Multiplikationstabelle zusammentragen, in der die Einträge jeweils die Strukturkonstanten sind:

$$\begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0,2) & (0,-2,0) \\ (0,0,-2) & (0,0,0) & (2,0,0) \\ (0,2,0) & (-2,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix}$$

Allgemein: Anhand der Strukturkonstanten a_{ij}^k in $[x_i x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k$ lässt sich eine Multiplikationstabelle aufstellen, aus der man die Lie Algebra rekonstruieren kann.

Denn z.B. folgt aus (A2) und (A3):

$$a_{ii}^k = 0 = a_{ij}^k + a_{ji}^k \ ;$$

$$\sum_k (a_{ij}^k a_{kl}^m + a_{jl}^k a_{ki}^m + a_{li}^k a_{kj}^m) = 0 \ .$$